

ACONTECERES EN EL AULA DE MATEMÁTICAS

Nelsy Rocío González Gutiérrez
Omaida Sepúlveda Delgado
Compiladoras

ACONTECERES EN EL AULA DE MATEMÁTICAS

Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia
Facultad de Ciencias de la Educación

2020



Aconteceres en el aula de matemáticas.

ISBN: 978-958-660-467-3

Dewey 370 /510.

1. Formación de profesores. 2. Didáctica de las matemáticas. 3. Aprendizaje de las matemáticas. 4. Educación matemática.



Aconteceres en el aula de matemáticas

Primera Edición, 2020
200 ejemplares (impresos)
ISBN: 978-958-660-467-3

Libro No. 13 - Colección 80 años UPTC

© Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, 2020

Rector, UPTC

Óscar Hernán Ramírez

Comité Editorial

Manuel Humberto Restrepo Domínguez, Ph. D.
Enrique Vera López, Ph. D.
Yolima Bolívar Suárez, Mg.
Sandra Gabriela Numpaque Piracoca, Mg.
Olga Yaneth Acuña Rodríguez, Ph. D.
María Eugenia Morales Puentes, Ph. D.
Edgar Nelson López López, Mg.
Zaida Zarely Ojeda Pérez, Ph. D.
Carlos Mauricio Moreno Téllez, Ph. D.

Editora en Jefe

Lida Esperanza Riscanevo Espitia, Ph. D.

Coordinadora Editorial

Andrea María Numpaque Acosta, Mg.

Impresión

Búhos Editores Ltda.
Calle 57 No. 9 - 36
Tunja - Boyacá - Colombia

Libro financiado por la Facultad de Ciencias de la Educación. Se permite la reproducción parcial o total con la autorización expresa de los titulares del derecho de autor. Este libro es registrado en Depósito Legal, según lo establecido en la Ley 44 de 1993, el Decreto 460 del 16 de marzo de 1995, el Decreto 2150 de 1995 y el Decreto 358 de 2000.

Libro de investigación.

Citación: González Gutiérrez, Nelsy Rocío (2020), Sepúlveda Delgado, Omaidá (Compiladoras). *Aconteceres en el aula de matemáticas*. Tunja: Editorial UPTC. Colección 80 años - Facultad de Ciencias de la Educación, No. 13.

Colección 80 Años



Facultad de Ciencias de la Educación

Director de la Colección

Dr. Julio Aldemar Gómez Castañeda
Decano

Sub-Comité de Publicaciones de la Facultad de Ciencias de la Educación

Antonio E. de Pedro - Doctor en Historia del Arte
Pedro María Argüello García - Doctor en Antropología
Rafael Enrique Buitrago Bonilla - Doctor en Educación Musical
Claudia Liliana Sánchez Sáenz - Doctora en Educación

Corrector de Estilo

Adán Alberto Ramírez Santos

Diseñador de la Colección:

Pedro Alejandro Leguizamón Páez

Diseñador del Logo de la Colección:

Pedro Alejandro Leguizamón Páez

Libro N° 13

Compiladoras: Nelsy Rocío González Gutiérrez - Omaida Sepúlveda Delgado

Título: Aconteceres en el aula de matemáticas

Diseño de Portada: Karol Fernanda Ramos

Las opiniones vertidas en los textos son de entera responsabilidad del autor.

CONTENIDO

SOBRE LOS AUTORES	17
--------------------------------	-----------

PRESENTACIÓN	19
---------------------------	-----------

CAPÍTULO 1. ACERCAMIENTO AL CONCEPTO DE FUNCIÓN DESDE LA MODELACIÓN MATEMÁTICA.....	27
--	-----------

Yuri Carolina Niño Castillo
Lida Esperanza Riscanevo Espitia

1.1 Contexto de la investigación.....	27
1.2 Consideraciones teóricas.....	32
1.3 ¿Qué ocurrió en el aula de clase de matemáticas?.....	39
1.4 Reflexiones finales	55
1.5 Bibliografía.....	58

CAPÍTULO 2. FACTORIZANDO CON REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS	65
---	-----------

Laura Ximena Casas Rodríguez
Nelsy Rocío González Gutiérrez

2.1 Contexto de la investigación.....	65
2.2 Cimientos teóricos y metodológicos de la investigación.....	66
2.3 ¿Qué ocurrió en el aula de clase?	79
2.3.1 Situación 1. “En pie, haciendo solitos”	84
2.3.2 Situación 2. “Vamos de la mano”	89
2.3.3 Situación 3. “Preparando el camino”	92
2.3.4 Situación 4. “A caminar”	95
2.4 Reflexiones finales	97
2.5 Bibliografía.....	99

**CAPÍTULO 3. SIGNIFICADO GLOBAL DE LA PROPOR-
CIONALIDAD DESDE EL CONTEXTO VARIACIONAL.....101**

Miguel Ángel Hurtado Martínez
Omaida Sepúlveda Delgado

3.1 Contexto de la investigación.....	101
3.2 Consideraciones teóricas.....	108
3.3 Análisis didáctico a priori	112
3.4 ¿Qué ocurrió en el aula de clase?	113
3.5 Configuración epistémica	116
3.6 Reflexiones finales	140
3.7 Referencias bibliográficas	143
CAPÍTULO 4. A MODO DE EPÍLOGO.....	147

ÍNDICE DE FIGURAS

Capítulo 1

Figura 1. Relación entre el área y las dimensiones de cada rectángulo..	41
Figura 2. Diferencia entre las dimensiones que son valores enteros..	42
Figura 3. Cómo hallar la dimensión que hace falta para determinar el área .	44
Figura 4. Volumen de determinada caja.	47
Figura 5. Modelos matemáticos para los ingresos.	53

Capítulo 2

Figura 6. Diseño metodológico.	70
Figura 7. Representación del plano de una finca	84
Figura 8. Representación área destinada a la construcción de una vivienda	84
Figura 9. Conversión al registro algebraico a partir del registro gráfico realizado por E8	85
Figura 10. Conversión al registro algebraico a partir del registro gráfico realizado por E11	85
Figura 11. Conversión al registro algebraico a partir del registro gráfico realizado por E17.	86
Figura 12. Conversión al registro algebraico a partir del registro gráfico realizado por E18	87
Figura 13. Conversión al registro algebraico a partir del gráfico realizado por E8	88
Figura 14. . Adaptación registro geométrico 1	89
Figura 15. Adaptación registro geométrico 2	89
Figura 16. Adaptación registro geométrico 3	89

Figura 17. Conversión al registro de lenguaje natural a partir del registro gráfico realizado por E13 y E6.....	89
Figura 18. Conversión al registro de lenguaje natural a partir del registro gráfico realizado por E13 y E19	90
Figura 19. Conversión al registro algebraico a partir del registro gráfico realizado por E13 y E17	91
Figura 20. Conversión al registro algebraico a partir del registro gráfico realizado por E6 y E17	91
Figura 21. Ilustración modelo de la piscina.....	92
Figura 22. Conversión a la representación algebraica realizada por E8.....	93
Figura 23. Conversión a la representación algebraica realizada por E4.....	93
Figura 24. Conversión a la representación algebraica realizada por E11	93
Figura 25. Conversión al registro geométrico y tratamiento interno del registro algebraico realizado por E4	94
Figura 26. Conversión al registro geométrico y tratamiento interno del registro algebraico realizado por E3	94
Figura 27. Representación geométrica problematizadora.....	95
Figura 28. Procesos cognitivos que realiza E15 partiendo del registro geométrico.....	96
Figura 29. Procesos cognitivos que realiza E3 partiendo de la representación geométrica.....	96

Capítulo 3

Figura 30. Práctica matemática aplicada a los estudiantes de grado séptimo.	114
Figura 31. Solución de los autores para la gráfica solicitada en la pregunta 3.	116
Figura 32. Medida del diámetro de un objeto circular realizada por el estudiante E1.	123

Figura 33. Materiales usados para el desarrollo de la situación problema.	124
Figura 34. Razón entre el perímetro y el diámetro; valores alejados de π (π).	125
Figura 35. Razón entre el perímetro y el diámetro; valores cercanos a π (π).	125
Figura 36. Lenguaje usado para justificar la no existencia de una relación.	126
Figura 37. Uso de la palabra: “el diámetro es aproximadamente la tercera parte del perímetro”.	126
Figura 38. Uso de la palabra: “el perímetro sale de casi triplicar el diámetro”.	126
Figura 39. Uso de la palabra: “los valores varían entre...”	126
Figura 40. Lenguaje algebraico para hallar un valor aproximado de π (π).	127
Figura 41. Concepto usado: “triple”.	129
Figura 42. Concepto usado: “tercera parte”.	129
Figura 43. Concepto usado: “directamente proporcionales”..	129
Figura 44. Procedimiento usado: “división”.	130
Figura 45. Procedimiento usado: “multiplicación y división”	130
Figura 46. Propiedad que justifica la razón entre el perímetro y el diámetro.	130
Figura 47. Justificación de la proporcionalidad.	131
Figura 48. Justificación de la relación entre el perímetro y el diámetro.	131
Figura 49. Lenguaje en palabras que relaciona el diámetro con la razón.	132
Figura 50. Lenguaje en palabras que evidencia la razón como una constante.	132
Figura 51. Lenguaje en palabras y numérico que relaciona el diámetro con la razón.	132

Figura 52. Lenguaje numérico dispuesto en forma tabular para hallar el perímetro.	132
Figura 53. Lenguaje en palabras y algebraico que evidencia la relación entre el perímetro y el diámetro.	132
Figura 54. Lenguaje algebraico que evidencia una aproximación al perímetro.	132
Figura 55. Lenguaje algebraico que evidencia la relación entre el perímetro y el diámetro.	133
Figura 56. Conceptos usados: “diámetro, aproximar, perímetro, tercer parte”.	134
Figura 57. Procedimientos usados: multiplicación y suma.	135
Figura 58. Procedimientos usados: división para hallar el radio a partir del diámetro.	135
Figura 59. Procedimiento usado: “aproximación” para hallar el perímetro del círculo.	136
Figura 60. Propiedad usada para justificar la proporcionalidad.	136
Figura 61. Justificación usada para realizar una operación.	136
Figura 62. Justificación usada para indicar que no es posible escribir una fórmula.	136
Figura 63. Lenguaje gráfico: representación icónica.	137
Figura 64. Lenguaje gráfico: gráfica de barras.	137
Figura 65. Lenguaje gráfico: gráfica circular.	138
Figura 66. Lenguaje gráfico: gráfica de puntos.	138
Figura 67. Lenguaje gráfico: línea recta.	138
Figura 68. Lenguaje gráfico: gráfica de barras. Elaboración Estudiante E15.	139

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Solución dada por los autores para el completado de la tabla de la situación problema.	115
Tabla 2. Solución de los autores para la tabla dada en la pregunta 3.	116
Tabla 3. Significados parciales del objeto matemático razón.....	142
Tabla 4. Significados parciales del objeto matemático proporción.	142

*A todos los docentes
que constantemente reflexionan
sobre su quehacer en la clase de matemáticas.*

SOBRE LOS AUTORES

Laura Ximena Casas Rodríguez

Licenciada en Matemáticas de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, Magíster en Educación Matemática, integrante del semillero de investigación Resonantes. Actualmente se desempeña como Docente Ocasional en la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Lida Esperanza Riscanevo Espitia

Licenciada en Matemáticas y Física, Especialista en Docencia de la Matemática, Especialista en Docencia Universitaria, Magíster en Educación y Doctora en Ciencias de la Educación. Está vinculada como profesora de planta del Programa de la Licenciatura en Matemáticas y actualmente se desempeña como Editora en Jefe de la UPTC. Ha liderado procesos de capacitación y formación de maestros vinculada al Programa Todos a Aprender del Ministerio de Educación Nacional y en el Programa de Maestría en Educación Matemática de la UPTC, lidera el grupo de investigación Somos Maestr@s en el área de educación matemática y tiene diferentes publicaciones en el campo investigativo sobre la formación de profesores de matemáticas.

Miguel Ángel Hurtado Martínez

Licenciado en Matemáticas y Estadística, Especialista en Necesidades de Aprendizaje en lectura, escritura y matemáticas, Magíster en Educación Matemática de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Actualmente se desempeña como profesor titular del Colegio Los Ángeles en Tunja.

Nelsy Rocío González Gutiérrez

Es Licenciada en Matemáticas y Física, Magíster en Ciencias Matemáticas, Doctora en Ciencias de la Educación. Actualmente se desempeña como profesora del Doctorado en Ciencias de la

Educación, Maestría en Educación Matemática y las carreras de Matemáticas y Licenciatura en Matemáticas; también es integrante de los grupos de investigación Álgebra y análisis y Somos Maestr@s, de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia UPTC. Sus áreas de interés son álgebra conmutativa, epistemología e historia de la matemática, educación matemática, saberes, conocimientos y prácticas en la formación de profesores de matemáticas. Últimas publicaciones: Libro “Mujeres en la investigación matemática, escenarios de visibilización”. Editorial UPTC. Tunja-2020. Artículo: La geometría, eje integrador del pensamiento matemático en educación básica, Educación y Ciencia, 2019.

Omaida Sepúlveda Delgado

Es Licenciada en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, ingeniera de sistemas y especialista en computación para la docencia de la Universidad Antonio Nariño, Magíster en Ciencia Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia y Doctora en Ciencias de la Educación de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Actualmente se desempeña como profesora, investigadora y coordinadora del grupo de investigación álgebra y análisis en la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Sus áreas de interés son álgebra abstracta (teoría de grupos, anillos, lineal), didáctica de la matemática (conocimiento didáctico matemático del profesor universitario - enfoque ontosemiótico del conocimiento y la Instrucción Matemática) (EOS).

Yuri Carolina Niño Castillo

Licenciada en Matemáticas, Especialista en Estadística, Magíster en Educación Matemática. Integrante del semillero de investigación Resonantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

PRESENTACIÓN

La educación matemática es un campo de investigación que despierta, desde hace muchos años, gran interés en el ámbito internacional entre los educadores de esta área disciplinar. Asimismo, en Colombia existen numerosos grupos de investigación que abordan temáticas relacionadas con estos campos de estudio, particularmente en la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (UPTC), donde se han gestado espacios y ambientes propicios para hacer que la investigación en torno a esta disciplina sea cada vez más fructífera y contribuya a incrementar su impacto en todas las sociedades y culturas.

Este desarrollo específico se ha soportado, en gran medida, en la labor que desde hace más de tres décadas vienen realizando docentes-investigadores de programas adscritos a las facultades de Educación y Ciencias de las diferentes seccionales de la UPTC, a través de la consolidación de grupos de investigación con gran reconocimiento nacional e internacional.

Recientemente, con el interés de conformar un grupo colaborativo de investigación como comunidad de pesquisa, se crearon el grupo Somos Maestr@s y el semillero de investigación Resonantes, ambos adscritos a la Facultad de Ciencias de la Educación de la UPTC. Se presentan como espacio académico de interacción entre educadores de matemáticas (en ejercicio y en formación) preocupados por coadyuvar en el hallazgo de posibles soluciones a problemáticas generadas dentro de las aulas de clase de matemáticas en la Educación Básica y Media, y en las aulas de Didáctica de la Matemática de los programas de licenciatura en Matemáticas y maestría en Educación Matemática, específicamente en lo inherente a la reflexión alrededor de temáticas que impliquen procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, desde distintas perspectivas teóricas de la Didáctica de la Matemática y de la formación investigativa del profesor de matemáticas.

La interacción promovida en este grupo ha generado una toma de conciencia sobre la trascendencia de asumir una postura investigativa en la formación de profesores de matemáticas, así como en la responsabilidad compartida en este proceso. La dinámica propia del grupo resalta la necesidad de estudiar, analizar, investigar y escribir conjuntamente sobre las prácticas pedagógicas en las clases de matemáticas, hecho que implica alejarse de imponer marcos teóricos y metodológicos de análisis y permite investigar sobre intereses personales, contribuciones reflexivas y problematización de prácticas contextualizadas. Se asume que los conocimientos sistematizados por los propios profesores permiten problematizar y comprender la propia práctica, con miras a ampliar las posibilidades de transformación curricular y desarrollo profesional.

Bajo estos principios —de responsabilidad y de posibilidades colaborativas de investigación— se gesta este libro, que contiene tres características propias que posibilitan ampliar nuestra visión del acontecer en el aula de matemáticas y en el aula de la formación inicial de profesores. La primera, una publicación de procesos investigativos colaborativos de formadores de profesores con estudiantes de posgrado (doctorado en Ciencias de la Educación y maestría en Educación Matemática), y profesores en ejercicio, en el interior de un semillero de investigación en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas. Esta característica permite escuchar las voces de los profesores como investigadores en el aula de clase y del rol que desempeñan, reflexionando sobre el proceso formativo de la investigación desde diferentes lugares de desarrollo profesional, lo cual permite integrar saberes e innovaciones de los diferentes integrantes del semillero de investigación.

La segunda, una publicación resultado de la identificación de un grupo de profesores que asume la práctica pedagógica en matemáticas bajo principios epistemológicos que reconocen al profesor de matemáticas como productor de conocimiento no solo *para* y *en* la práctica, sino que, de manera especial, lo identifican como productor de conocimientos *a través* de la práctica. En las dos primeras situaciones se identifica una postura epistemológica técnico instrumental y bajo la racionalidad técnica, respectivamente, las cuales idealizan

modelos teóricos que deben ser aprendidos por los profesores para mejorar sus prácticas y conllevan implícitamente una superioridad de un saber sobre otro; en el primer caso, la teoría sobre la práctica, y en el segundo, la práctica sobre la teoría. El intento de superar esa dicotomía se manifiesta en este libro, mediante la presentación de escritos en los que el conocimiento de los autores investigadores (conocimiento de la práctica), se manifiesta cuando su propia práctica es investigada y analizada conjuntamente. Significa, entonces, que la postura epistemológica sobre la cual se justifican los textos es de una práctica reflexiva e investigativa, bajo una relación dialéctica entre teoría y práctica.

La tercera responde a un texto que vincula de forma creativa la teoría y la práctica, tanto de la matemática como de la educación matemática, a través de un lenguaje no hermético, poco formalizado y expuesto a través de la vivencia propia de los investigadores, en el proceso de formular cuestionamientos, interpretar resultados y plantear conclusiones para generar, a través de la escritura, la posibilidad de dar a conocer cómo los estudiantes construyen conocimiento matemático, y cómo los profesores y formadores de profesores constituyen saberes de la educación matemática.

La Educación Matemática, en general, es un campo que involucra una importante cuota de complejidad, quizás debido a las múltiples visiones y perspectivas teóricas existentes para el análisis de una misma problemática, y, tal vez también, debido a la especificidad propia de los agentes involucrados en los procesos educativos. Atendiendo a tal complejidad, el presente manuscrito se ha dividido en tres capítulos, cada uno de los cuales presenta una realidad o acontecer al que se enfrenta el docente de matemáticas durante el ejercicio de su labor docente. Las temáticas específicas abordadas corresponden a los intereses particulares de investigación de los integrantes del grupo y sus alcances en el proceso reflexivo de la práctica pedagógica matemática.

En particular, la investigación sistematizada en el primer capítulo se propuso caracterizar el aprendizaje de los estudiantes a través del modelado matemático del concepto de función, a partir de presentar situaciones didácticas como escenarios exploratorio-investigativos contextualizados. Bajo el paradigma de la indagación e investigación,

estos escenarios se presentan como una alternativa metodológica de la enseñanza de las matemáticas, la cual advierte la necesidad de relegar las dinámicas de clase tradicionales en las que el estudiante solo replica procedimientos y algoritmos necesarios para resolver mecánicamente ejercicios a través de una excesiva manipulación algebraica que limita la comprensión de los conceptos.

La investigación tiene un enfoque cualitativo, sobre un estudio de caso de un grupo conformado por cuatro estudiantes. La información se recopiló gracias a la observación, grabaciones en audio y reportes escritos de los estudiantes. Se seleccionó el material relevante para reconocer el papel de la modelación matemática en el aprendizaje del concepto de función; por lo que se desarrollaron tres situaciones de enseñanza, cada una bajo un tipo de referencia y contextualización distinta: la primera, se reconoce bajo la referencia de la matemática en sí misma; la segunda se cataloga como una situación semirreal, y para la tercera situación de enseñanza se tomaron datos reales con los que se formularon algunos modelos matemáticos.

A partir del análisis de la información se concluye que, en la modelación matemática, los estudiantes vivieron los procesos de formulación del modelo y validación del mismo, como dos etapas de desarrollo del pensamiento matemático. Se identificaron las variables que intervienen en la situación, aspecto que se relaciona de manera directa con el concepto mencionado. La modelación matemática se reconoce desde este paradigma exploratorio-investigativo como un enfoque crítico que proporciona a los estudiantes herramientas que fortalecen sus habilidades para actuar y transforman su entorno interpretando diferentes situaciones, formulando y probando hipótesis, todo esto desde el planteamiento y validación de modelos matemáticos.

Por otro lado, el segundo capítulo surgió de la constante auto reflexión crítica de la labor docente, pedagógica e investigativa de la docente titular de la asignatura; está fundamentado en la Teoría de Representaciones Semióticas propuesta por el filósofo, matemático y psicólogo Raymond Duval. Entendiendo que los conceptos matemáticos tienen diferentes niveles de abstracción, se hace necesario recurrir a distintas representaciones semióticas que ayuden al estudiante a lograr su total comprensión; dichas representaciones son

vitales tanto en los procesos de comunicación como en el desarrollo de la actividad matemática. Aquí, la *comprensión* no es entendida como la acción de pasar del contenido de una representación hasta el concepto matemático representado, el acto de comprender requiere establecer relaciones entre diversos contenidos de representación del mismo concepto. Desde esta perspectiva, el estudio en referencia muestra algunos resultados de la investigación que se efectuó como estrategia para generar diversos ambientes de aprendizaje en el aula de clase, específicamente en cuanto al análisis de diversos registros y representaciones semióticas, y con esto, en las actividades cognitivas de formación, tratamiento y conversión que desarrolló un grupo de estudiantes de grado octavo al realizar procesos de factorización, o de expansión, de una expresión algebraica.

Con el objetivo de conocer el contexto en el que vivían los estudiantes (sujetos de estudio), se realizó una entrevista semiestructurada que sirvió como fundamento para la creación de una secuencia didáctica contextualizada, por medio de la cual se buscó que los estudiantes consolidaran diversas representaciones teniendo en cuenta el registro de salida y siendo conducidos por preguntas orientadoras. En el escrito, las autoras destacan varias creaciones, ilustraciones y comunicaciones que realizaron los estudiantes al factorizar una expresión algebraica, específicamente una diferencia de cuadrados perfectos.

El tercer capítulo corresponde a un texto donde se expone cómo los resultados de un estudio epistemológico histórico, profundo sobre objetos matemáticos, se “operativiza” para ser llevado a la práctica del docente. En este sentido, se parte de la identificación de unos significados epistémicos del objeto matemático de estudio y se proponen situaciones problemáticas que permiten al estudiante reconstruir algunos de ellos, considerándolos como sistemas de prácticas matemáticas donde el objeto interviene. Se trata entonces de presentar la reflexión de los docentes investigadores sobre la identificación de objetos considerados matemáticos como son: el lenguaje, los procedimientos, los conceptos y los argumentos; objetos que se activan a partir del diseño de situaciones problema contextualizadas propuestas a los estudiantes de educación básica. Esta reflexión de los docentes sobre su práctica pedagógica es considerada por muchos autores como una de las competencias importantes que debe desa-

rrollar el profesor de matemáticas en la búsqueda de una idoneidad didáctica para sus procesos de enseñanza, que lleven al estudiante a la comprensión de dichos objetos matemáticos.

El estudio presenta un enfoque cualitativo con un alcance exploratorio-descriptivo, ya que los significados de los objetos razón y proporción son considerados como emergentes de las prácticas matemáticas de los estudiantes de grado séptimo, al resolver una situación problema de proporcionalidad desde un contexto variacional. El estudio se desarrolla desde el marco del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS)¹, el cual ofrece herramientas teóricas y metodológicas que permiten caracterizar los significados de los objetos razón y proporción.

Según los argumentos presentados, se diseña una situación problema y se presenta el análisis de su puesta en marcha, desde la perspectiva de los investigadores (configuración epistémica), identificando algunos de los objetos y significados emergentes en la solución propuesta por los estudiantes. De igual forma, se analizan las prácticas matemáticas de los estudiantes al resolver la situación problema (configuración cognitiva).

El análisis de la configuración epistémica permite caracterizar *a priori* los significados de los objetos razón y proporción, e identificar los posibles conflictos potenciales que pueden estar presentes en la solución del problema, y el análisis cognitivo comprende la identificación de algunos de los significados dados a la proporcionalidad en las prácticas matemáticas de los estudiantes². El estudio reportado en este capítulo da respuesta a la pregunta de investigación: ¿Cuáles son los significados de los objetos razón y proporción, presentes en

1 Juan Godino, "Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática", en *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*, Universidad de Granada, 2017, 1-20, <http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.htm>. (Consultado el 2 de enero de 2018)

2 Walter F. Castro y Mauro Rivas, "Aportes del estudio de configuraciones epistémicas y cognitivas sobre la proporcionalidad en la formación inicial de profesores de primaria", en *Memorias del 12.º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (ECME)*, Armenia (Quindío): Gaia, 2011, 131-142, <http://funes.uniandes.edu.co/2589/1/RivasAportesAsocolme2011.pdf>. (Consultado el 2 de marzo de 2018)

las prácticas matemáticas de un grupo de estudiantes de grado séptimo al resolver una situación problema de proporcionalidad en un contexto variacional?

Como conclusión, según los argumentos expuestos, este libro no representa un dogma; por el contrario, su valor agregado está en no haber dicho lo suficiente como para permitir que dichas omisiones se conviertan en el cimiento de nuevas investigaciones para sus lectores.

Nelsy Rocío González Gutiérrez

Lida Esperanza Riscanevo Espitia

Omaida Sepúlveda Delgado

CAPÍTULO 1. ACERCAMIENTO AL CONCEPTO DE FUNCIÓN DESDE LA MODELACIÓN MATEMÁTICA

Yuri Carolina Niño Castillo

Lida Esperanza Riscanevo Espitia

1.1 CONTEXTO DE LA INVESTIGACIÓN

Al reflexionar sobre la práctica pedagógica matemática y los materiales y recursos sobre los cuales esta se apoya, es muy probable encontrarse con propuestas pedagógicas tradicionales desarrolladas bajo el paradigma del ejercicio que suponen que el docente primero debe exponer algunos procedimientos o técnicas matemáticas, para luego asignar a los estudiantes ejercicios similares que les permitan replicar los procedimientos, que se rigen entre otras cosas por la existencia de una única respuesta correcta y de privilegiar solo la ejercitación sistemática del seguimiento de algoritmos¹. Bajo esta delimitación, los ejercicios que el docente selecciona para el desarrollo de las clases pueden convertirse en una actividad poco interesante y monótona, corriendo el riesgo de generar desmotivación por aprender.

La Educación Matemática señala que, si se enfatiza en la vía abstracta y poco intuitiva de la enseñanza de las matemáticas², se acude a presentar sus contenidos de una manera cerrada, acabada y estática, lo cual no permite asumirla como una herramienta que fortalezca el

1 Ole Skovsmose, “Escenarios de investigación”, en *Educación Matemática Crítica: una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas*, compilado por Paola Valero y Ole Skovsmose, Bogotá: Universidad de los Andes / Aalborg University, 2012.

2 Ángel Ruiz, *Historia y filosofía de la Matemática*. San José: Editorial Universidad Estatal a Distancia (EUNED), 2003, 567-568.

pensamiento crítico de los estudiantes³. La dinámica de ejercitación simplemente para replicar procedimientos puede propiciar un aprendizaje superficial que se basa en la memorización y la reproducción⁴. La memorización de algoritmos no es útil si los estudiantes no tienen clara la aplicabilidad que se le puede dar a cada uno de ellos, y esto es lo que finalmente llega a dar sentido al hecho de aprenderlos; en otras palabras, el manejo exclusivo de algoritmos no le permite al estudiante percibir los vínculos que tiene cada procedimiento con las aplicaciones que es posible encontrar a su alrededor, por lo que se le está privando de contextualizar sus aprendizajes en escenarios diferentes⁵.

Al respecto, se dice que si un estudiante se desenvuelve hábilmente aplicando de manera mecánica lo que memoriza, esto no implica que está desarrollando “procesos de pensamiento vinculados a la matemática”⁶; podría decirse que los estudiantes normalmente conocen el manejo algorítmico mecánico del cálculo, pero no han asimilado los conceptos⁷, lo cual es un factor a tener en cuenta respecto al desempeño y actitud a la hora de abordar situaciones de aprendizaje que involucren más que la sola mecanización para solucionarlos; ya que los estudiantes no tienen mucho éxito en la traducción de

3 Pedro González Urbaneja, “Historia de la matemática: Integración cultural de las matemáticas, génesis de los conceptos y orientación de su enseñanza”, *Enseñanza de las ciencias*, vol. 9, n.º 3, 1991.

4 Patricia Salinas y Juan Antonio Alanís, “Hacia un nuevo paradigma de la enseñanza del Cálculo dentro de una institución educativa”, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 12, n.º 3, 2009.

5 Ricardo Cantoral, “Enseñanza de la matemática en la educación superior”, *Sinéctica. Revista Electrónica de Educación*, n.º 19, 2001. <https://sinectica.iteso.mx/index.php/SINECTICA/article/view/359>. (Consultado el 20 de agosto de 2018); María Aravena, Carlos Caamaño y Joaquín Giménez, “Modelos matemáticos a través de proyectos”, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 11, n.º 1, 2008.

6 Patricia Salinas, Juan Antonio Alanís y Ricardo Pulido, “Cálculo de una variable. Reconstrucción para el aprendizaje y la enseñanza”, *Didac*, n.ºs 56-57, 2010-11.

7 Mariano Jiménez y Arantxa Areizaga, “Reflexiones acerca de los obstáculos que aparecen, en la enseñanza de las matemáticas, al pasar del bachillerato a la universidad”, en *Acta de IX Jornada de ASEPUMA*, Guipuzcoa, 2001, 1-10.

problemas verbales al lenguaje matemático⁸. Acudir a prácticas pedagógicas contextualizadas y aplicadas de los conceptos matemáticos implica, entre otras cosas, presentar de forma diferente situaciones de enseñanza para que los estudiantes aprendan de una manera más significativa⁹ y examinar de forma holística el grado de comprensión que se tiene de conceptos fundamentales¹⁰ o de procesos y estrategias de resolución de problemas.

La reflexión sobre las implicaciones del desarrollo de estas prácticas contextualiza la gestación del proceso de investigación, que partió de asumir que una de las causas para no entender en profundidad el concepto de función se debe, precisamente, a que se realiza una manipulación algebraica excesiva relativa al mismo, lo cual conduce a una comprensión limitada de este¹¹; por lo que resulta pertinente abandonar la dinámica de clase tradicional y desarrollar prácticas pedagógicas que motiven a los estudiantes a indagar e investigar, que involucren aspectos contextualizados que sean de su interés y les generen aprendizajes significativos. Bajo dicho propósito, esta investigación se gestó y desarrolló en el seno de la participación de las autoras¹² de este capítulo de libro en el semillero de investigación

8 Ricardo Cantoral, "Hacia una didáctica del cálculo basada en la cognición", *Publicaciones Centroamericanas*, n.o 7, 1993; Jesús López y Landy Sosa, "Dificultades conceptuales y procedimentales en el aprendizaje de funciones en estudiantes de bachillerato", en *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, 2008, 308-318; María Trigueros Gaisman, "El uso de la modelación en la enseñanza de las matemática", *Innovación Educativa*, vol. 9, n.o 46, 2009.

9 Trigueros Gaisman, "El uso de la modelación".

10 João Pedro da Ponte, "Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos", en *La actividad matemática en el aula: homenaje a Paulo Abrantes*, editado por Leonor Santos, Joaquim Giménez Rodríguez y João Pedro da Ponte, Barcelona: Graó, 2004.

11 Fernando Hitt, "Dificultades en el aprendizaje del cálculo", en *XI Encuentro de profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior*, Morelia (México): Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, 2003, 1-25.

12 Estar vinculadas al grupo de investigación Somos Maestr@s y, en especial, en el semillero de investigación Resonantes, implicó nuestra participación intensa en las actividades que coadyuvaban a este grupo constituirse, paso a paso, en una comunidad investigativa. La dinámica inherente a este compromiso dio pie para plantear este proyecto de investigación, socializar de manera constante los avances, recibir continua retroalimentación de las visiones de cada uno de sus integrantes y contribuir a las finalidades del grupo.

Resonantes¹³ del Programa de licenciatura en Matemáticas y en el Programa de maestría en Educación Matemática de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (UPTC).

Las delimitaciones inherentes derivadas de la participación en el semillero de investigación como estudiante y profesoras del Programa de maestría y de formación inicial de profesores llevaron a problematizar la necesidad de sistematizar la reflexión sobre la práctica pedagógica matemática a partir de asumir que “el profesorado no debe ser objeto de investigación de personas externas, sino investigador de sí mismo”¹⁴, y que a través de dicha reflexión se pueden construir nuevas teorías, las cuales podrían “contribuir a la constitución de una base codificada de conocimientos sobre la enseñanza”¹⁵, lo cual ha generado en el semillero, como grupo colaborativo de investigación, la posibilidad de constituirse como una comunidad investigativa que tiene como uno de sus objetivos principales desnaturalizar las prácticas pedagógicas tradicionales y problematizarlas desde las implicaciones de asumirlas desde el paradigma de la investigación y, sobre este, reconocer que las situaciones de enseñanza basadas en actividades exploratorio-investigativas contribuyen al desarrollo del pensamiento matemático.

A partir de las anteriores consideraciones se planteó la investigación para responder a la siguiente pregunta: ¿Cómo contribuyen los escenarios exploratorio-investigativos al aprendizaje del concepto de función, a través de la modelación matemática? Se asumió un enfoque cualitativo, flexible, interesado más en el proceso que en la obtención

13 Este proyecto hace parte de otro de mayor alcance planteado por el semillero de investigación, con el título de “Aprendiendo a enseñar matemáticas a través de investigar colaborativamente”, al cual están inscritos dos formadores de profesores de matemáticas, diecisiete estudiantes en formación inicial, diez estudiantes de maestría y un estudiante de doctorado.

14 L. Stenhouse, citado en Antonio Latorre, *La investigación-acción. Conocer y cambiar la práctica educativa*. Barcelona: Graó, 2003, 10.

15 Kenneth Zeichner, “El maestro como profesional reflexivo”, en *11.º University of Wisconsin Reading Symposium: «Factors Related to Reading Performance»*, trad. Pablo Manzano Bernárdez. Wisconsin, 1993, 45.

de resultados¹⁶, centrado en la comprensión de los fenómenos basándose en la perspectiva y experiencia de los participantes¹⁷ y en la interpretación de sus diferentes perspectivas frente a cada situación propuesta de enseñanza y de aprendizaje. Se delimitó a un estudio de caso, atendiendo a que estos tienen como objetivo comprender con claridad los “cómo” y los “por qué” del caso elegido¹⁸. Este tipo de estudio se realiza cuando, a pesar de tener diversidad de casos que se refieren al mismo fenómeno, el investigador opta por concentrarse en uno de ellos, éste siempre se trata de comprender cómo ven las cosas las personas estudiadas¹⁹.

Específicamente, la investigación se desarrolló en la UPTC, sede central, con un grupo de veintidós estudiantes cursando la asignatura Matemática Aplicada a la Informática. Metodológicamente siempre se trabajó en el desarrollo de las secuencias de enseñanza en grupos de tres y cuatro personas, y uno de ellos fue elegido como el estudio de caso. Se recurrió a grabaciones de audio, entrevistas no estructuradas e instrumentos de observación de clases para recolectar la información. Para transcribir y seleccionar la información relevante a la investigación se tuvieron en cuenta las indicaciones mencionadas por Tusón²⁰, quien argumenta que esta tarea es una parte trascendental para el análisis de la información, como una primera manipulación de los datos, orientada al cumplimiento de los objetivos planteados.

En este sentido, se seleccionó el material a analizar relevante al reconocimiento del papel de la modelación matemática en el aprendizaje del concepto de función, derivado del desarrollo de tres situaciones de enseñanza. La primera con el fin de formular un modelo matemático que permitiera calcular el área de un rectángulo de 24 cm de

16 Carlos A. Monje, “Metodología de la investigación cuantitativa y cualitativa - Guía didáctica”, Neiva (Colombia): Universidad Surcolombiana, 2011. <https://www.uv.mx/rmipe/files/2017/02/Guia-didactica-metodologia-de-la-investigacion.pdf>. (Consultado el 17 de julio de 2018)

17 Roberto Hernández Sampieri, Carlos Fernández Collado y Pilar Baptista Lucio, *Metodología de la investigación*. México: McGraw-Hill, 2014.

18 João Pedro da Ponte, “Estudos de caso em educação matemática”, *Boletim de Educação Matemática*, vol. 19, n.º 25, 2006.

19 Robert E. Stake, *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Ediciones Morata, 2007.

20 Amparo Tusón V., “El análisis de la conversación: entre la estructura y el sentido”, *Estudios de sociolingüística*, vol. 3, n.º 1, 2002.

perímetro conociendo uno de sus lados, es decir, una función cuya variable independiente fuera alguna de las dimensiones del rectángulo; en la segunda actividad se debía construir una caja recortando cuadrados iguales en las esquinas de una hoja rectangular, y realizar varios diseños cambiando el tamaño de los cuadrados, para luego establecer si era posible determinar un modo de calcular el volumen de cualquiera de las cajas conociendo solo una de sus dimensiones. Para la tercera actividad los estudiantes debían elegir una temática de su agrado, sobre la cual recopilarían datos que luego modelarían.

1.2 CONSIDERACIONES TEÓRICAS

Las matemáticas, como un área de formación interdisciplinar, se vislumbran como posibilitadoras del fortalecimiento de las capacidades de cada individuo para tomar decisiones de manera crítica y objetiva en su diario vivir; sin embargo, para el danés Ole Skovsmose, la enseñanza de las matemáticas en contextos escolares no contribuye en algunos casos en el logro de este objetivo. Su punto de vista le ha permitido fundamentar, en los últimos años, una perspectiva teórica que muestra lo útil que puede llegar a ser la educación matemática formando ciudadanos capaces de tomar decisiones de una manera crítica, transmitiendo posibilidades de una práctica docente distinta, que no silencie ni reprima a las personas, sino que relacione esta materia con aspectos de índole social, contribuyendo también en el desarrollo de una competencia democrática²¹.

Esta perspectiva teórica le ha permitido a Skovsmose²² proponer actividades en las que se motive al estudiante a indagar, explorar, interactuar y argumentar de manera objetiva los caminos conducentes a posibles soluciones matemáticas de cada actividad propuesta. Este fundamento teórico plantea hacer diferencia entre diversos ambientes de aprendizaje, los cuales deben migrar de un paradigma del ejercicio a un paradigma investigativo. En el paradigma investigativo es importante mostrarles, tanto a estudiantes como a docentes, que el conocimiento matemático también se puede generar a partir de actos

21 Ole Skovsmose, *Hacia una filosofía de la Educación Matemática Crítica*, trad. Paola Valero, Bogotá: Una empresa docente-Universidad de los Andes, 1999.

22 Skovsmose, "Escenarios de investigación".

creativos que se relacionan con métodos de búsqueda²³, además que el objetivo de la enseñanza debería centrarse en proponer situaciones para favorecer en los estudiantes la comprensión de conocimientos y el desarrollo de habilidades que promuevan la interacción social²⁴, contribuyendo así en la construcción de una sociedad más democrática y participativa²⁵.

El cambio en la dinámica de la clase para fomentar un ambiente investigativo se asume desde la necesidad de plantear escenarios de investigación²⁶, caracterizados por tareas y actividades exploratorio-investigativas²⁷. Tanto la una como la otra se enfocan en fomentar la indagación en el aula de clase, y dichas perspectivas sugieren que las actividades a proponer no deben ser prolongadas, no deben limitar las posibilidades de solución, deben motivar al estudiante a explorar diferentes soluciones y a indagar para argumentar las soluciones que plantea; deben mantener siempre el interés por ser solucionadas. Además, la implementación de estas actividades requiere tener en cuenta que, al introducir un nuevo tema en el aula de clase, el docente se puede valer de lo que Skovsmose²⁸ denomina tipos de referencias y Da Ponte²⁹ tipos de tareas de acuerdo con el contexto, refiriéndose a acudir a escenarios planteados desde las matemáticas, unos relacionados con una situación semirreal, y otros con situaciones de la vida real. Las circunstancias semirreales plantean una realidad construida con aportes de la realidad que también contempla aspectos que sería poco probable que se dieran en esta; respecto al planteamiento de las situaciones reales, este debe vincular

23 Darwin J. Silva Alayón, “De lo real a lo formal en matemática”, *Integra Educativa*, vol. 3, n.º 2, 2010: 160.

24 María Salett Biembengut y Nelson Hein, “Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática”, *Educación Matemática*, vol. 16, n.º 2, 2004: 123.

25 Darwin J. Silva Alayón, “De lo real a lo formal en matemática”.

26 Skovsmose “Escenarios de investigación”.

27 João Pedro da Ponte [“Problemas e investigaciones”], realiza una descripción detallada de los tipos de tareas que se pueden implementar en el aula de clase; el autor habla de cuatro tipos, que se clasifican de acuerdo con la estructura —cerrada o abierta—, o el grado de dificultad —accesible o difícil—; estas son: ejercicios, problemas, tareas de exploración y de investigación.

28 Skovsmose, “Escenarios de investigación”.

29 Da Ponte, “Problemas e investigaciones”.

el ambiente social de los estudiantes, sus intereses y preocupaciones, con lo cual es necesario conocer y entender el contexto³⁰.

Durante el desarrollo de este tipo de actividades toma importancia en el aprendizaje el trabajo en equipo ya que, desde el punto de vista social, en el intercambio de ideas cada individuo pasa por diferentes momentos, así que de acuerdo con la interpretación que le asigne a las opiniones de los demás, puede ratificar, complementar o modificar sus puntos de vista, y precisamente este intercambio es un elemento esencial para las posibilidades de aprendizaje de cada persona³¹. Así mismo, podría decirse que al trabajar en grupo se pueden aclarar dudas y superar dificultades, que si se quedaran en el análisis individual podrían llegar a convertirse en algo frustrante, por lo que también es importante tener en cuenta que el aprendizaje es un proceso que se vive de manera colectiva³².

De otra parte, se considera que la educación debe ser una herramienta de integración, que permita el desarrollo de las capacidades necesarias para participar activamente en los procesos sociales en los que cada individuo tiene que desenvolverse³³, por lo que la escuela debe contribuir a motivar la comunicación y propiciar la cooperación³⁴. De esta resulta propicio proponer los escenarios exploratorio-investigativos, ya que fomentan el diálogo y la comunicación entre los

30 Brigitte Sánchez Robayo y José Torres Duarte, “Educación Matemática crítica: un abordaje desde la perspectiva sociopolítica a los ambientes de aprendizaje”, en *Acta del X Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*, Pasto: Asocolme, 2009, 5.

31 Paola Valero, “¿De carne y hueso? La vida social y política de la competencia matemática”, en *Memorias del Foro Educativo Nacional de Colombia - Competencias Matemáticas*, Bogotá: Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN), 2006, 3.

32 Lida Riscanevo Espitia, “La teoría de la práctica social del aprendizaje en la formación de profesores de matemáticas”, *Revista de Investigación, Desarrollo e Innovación*, vol. 7, n.º 1, 2016.

33 Álvaro Bustamante Rojas, “Educación, compromiso social y formación docente”, *Revista Iberoamericana de Educación*, vol. 4, n.º 37, 2006: 4.

34 Jaume Martínez Bonafé, “Arqueología del concepto ‘compromiso social’ en el discurso pedagógico y de formación docente”, *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, vol. 3, n.º 1, 2001: 5, <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=243787>. (Consultado el 16 de abril de 2018)

estudiantes, favoreciendo un aprendizaje crítico de las matemáticas³⁵; así que se propone incorporar este tipo de actividades específicamente a través de la modelación matemática, ya que esta también favorece la comunicación³⁶.

La modelación matemática no debe entenderse como la simple aplicación de una fórmula, o peor aún, su memorización³⁷; se debe considerar la forma de describir la relación entre la realidad y las matemáticas³⁸. La modelación “se concibe como el proceso cognitivo que se tiene que llevar a cabo para llegar a la construcción del modelo matemático de un evento u objeto del área del contexto”³⁹, que lleva implícita la consideración de un ciclo de modelación⁴⁰, como proceso de construcción y evaluación de modelo; en el primer momento de este ciclo se realiza la identificación de las variables que intervienen en el evento, y en el segundo se identifican las relaciones existentes entre estas y distintos conceptos tanto de la matemática como del contexto en el que se da la situación.

Algunos autores⁴¹ agrupa estos dos momentos en una primera fase denominada “formulación del modelo matemático”, en la cual se tiene en cuenta que el modelo es un conjunto de relaciones matemáticas

35 Helle Alro y Ole Skovsmose, “Aprendizaje dialógico en la investigación colaborativa”, en *Educación Matemática Crítica: una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas*, compilado por Paola Valero y Ole Skovsmose, Bogotá: Universidad de los Andes / Aalborg University, 2012, 170.

36 María Aravena y Carlos Caamaño, citados en Ruth Rodríguez, Samantha Quiroz y Lorenza Illanes, “Competencias de modelación y uso de tecnología en ecuaciones diferenciales”, en *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, México, D. F.: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, 2013, 2123.

37 Carlos Eduardo Vasco, “El pensamiento variacional y la modelación matemática”, en *Conferencia Interamericana de Educación Matemática (CIAEM)*, 2003, 2014.

38 Ministerio de Educación Nacional (MEN), “Lineamientos Curriculares - Matemáticas”, Bogotá: 1998.

39 Patricia Camarena, “La matemática en el contexto de las ciencias y la modelación”, *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, n.º 10, 2012: 190.

40 Jhony A. Villa Ochoa y Héctor M. Ruiz Ramos, “Modelación en educación matemática: una mirada desde los lineamientos y estándares curriculares colombianos”, *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, n.º 27, 2009: 5. <http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/view/102>. (Consultado el 2 de junio de 2018)

41 Claude Janvier y Ricardo Nemirovsky, citados en Fabián A. Posada Balvín y Jhony A. Villa Ochoa, “El razonamiento algebraico y la modelación matemática”, *Didáctica de las matemáticas*, vol. 2, n.º 2, 2006.

y de símbolos que representan, de cierta forma, el fenómeno en cuestión⁴², es decir, intenta explicar, predecir y solucionar algunos aspectos del mismo⁴³. Camarena⁴⁴ considera agregar a lo señalado por Villa y Ruiz⁴⁵ como un ciclo de modelación, un tercer momento denominado “validación del modelo”, que implica que se acepte como razonable y representativo de la situación que le dio origen; para Janvier⁴⁶, esta es simplemente la segunda fase en el proceso de modelación, denominada “validación”. Independientemente de las fases o momentos a considerarse en ese proceso de desarrollo matemático, la modelación puede considerarse un contexto de aprendizaje que motiva a los alumnos a investigar y cuestionar situaciones que hacen alusión a la realidad, de esta manera el uso de las matemáticas contextualizadas les brindaría una oportunidad para debatir el papel que estas tienen en la sociedad, así como la naturaleza de los modelos matemáticos⁴⁷.

La modelación matemática se considera entonces como una perspectiva de enseñanza de las matemáticas con un enfoque crítico, ya que a través de esta se pueden proporcionar herramientas a los estudiantes para que, como ciudadanos en continua formación, puedan actuar y transformar su entorno⁴⁸, desarrollando su capacidad de análisis ante diferentes demandas sociales al interpretar datos y leer diversas situaciones, proponer y probar hipótesis, y plantear y validar modelos; además, fortalece su autonomía, amplía su creatividad y la visión que poseen de su entorno, contribuyendo en el ejercicio pleno

42 María Salett Biembengut y Nelson Hein, “Modelación matemática: estrategia para enseñar y aprender matemáticas”, *Educación Matemática*, vol. 11, n.º 1, 1999.

43 Jhony A. Villa Ochoa, “La Modelación como Proceso en el Aula de Matemáticas: un marco de referencia y un ejemplo”, *TecnoLógicas*, n.º 19, 2007: 67.

44 Camarena, “La matemática en el contexto”.

45 Villa Ochoa y Ruiz Ramos, “Modelación en educación matemática”.

46 Janvier y Nemirovsky, citados en Posada y Villa, “El razonamiento algebraico”.

47 Trigueros Gaisman, “El uso de la modelación”.

48 Milton Rosa, Frederico da Silva Reis y Daniel Clark Orey, “A modelagem matemática crítica nos cursos de formação de professores de matemática”, *Acta Scientiae*, vol. 14, n.º 2, 2012: 162.

de su ciudadanía⁴⁹. También vincula el diálogo, permitiendo que los estudiantes negocien, debatan, y aprendan a respetar las ideas de los demás, propiciando ambientes democráticos en el aula de clase⁵⁰.

La relación entre la modelación matemática y los escenarios exploratorio-investigativos empieza por asumir como punto común que la perspectiva de aprendizaje de las matemáticas no debe fundamentarse en el seguimiento de algoritmos descontextualizados de su aplicación, sino que estos pueden ser el resultado de un largo proceso de indagación y descubrimiento, que sintetizan la utilidad que tienen las matemáticas en la sociedad y generan la posibilidad de fortalecer el proceso de aprendizaje, como herramienta clave a la hora de introducir nuevos conceptos en el aula de clase⁵¹.

El concepto de función toma protagonismo en el área de matemáticas como saber a ser enseñado por “su naturaleza unificante y modelizadora”⁵², la importancia de este se atribuye a que tiene un campo amplio de aplicaciones prácticas⁵³. Investigadores como Spivak⁵⁴ le atribuyen ser el concepto más importante de las matemáticas, no en vano las ramas de la matemática moderna, en su mayoría, centran sus investigaciones en el estudio de las funciones. Por tal motivo, comprender el concepto de función implica, entre otras cosas, relacionarla con la dependencia entre cantidades o magnitudes que son susceptibles de cambio; en otras palabras, se asume la modelación

49 Nelson Hein y María Salett Biembengut, “Modelaje matemático como método de investigación en clases de matemáticas”, en *Memorias del V Festival Internacional de Matemática*, Puntarenas (Costa Rica), 2006, 1-25; Daniel Clark Orey y Milton Rosa, “A dimensão crítica da modelagem matemática: ensinando para a eficiência sociocrítica”, *Horizontes*, vol. 25, n.º 2, 2007: 204.

50 Jussara de Loiola Araújo, “Uma abordagem sócio-crítica da Modelagem Matemática: a perspectiva da educação matemática crítica”, *Alexandria. Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, vol. 2, n.º 2, 2009.

51 Trigueros Gaisman, “El uso de la modelación”.

52 Vicenç Font, “Funciones”, en *Matemáticas. Complementos de formación disciplinar*, coordinado por Jesús María Goñi, Barcelona: Graó, 2011, 146.

53 Carmen Azcárate Giménez y Jordi Deulofeu Piquet, *Funciones y gráficas*, Madrid: Editorial Síntesis, 1996, 17.

54 Michael Spivak, *Calculus*. Cálculo infinitesimal, trad. Bartolomé Frontera Marques. México: Editorial Reverté, 1996.

como “una ley que regula la dependencia entre cantidades u objetos variables”⁵⁵.

El concepto de función adquiere un sentido dinámico cuando se lo relaciona con fenómenos susceptibles de cambio o variación, pero si se ve como un ente abstracto adquirirá un carácter más estático, y al presentarlo de esta manera se pierde de vista la función como un modelo matemático capaz de representar un fenómeno de variación⁵⁶. No se puede perder de vista el hecho de que el concepto matemático en cuestión ha pasado por un proceso histórico que ha permitido llegar a una expresión formal. Por ejemplo, los babilonios empezaron trabajando implícitamente con la idea de relación, muy importante en la construcción del concepto de función⁵⁷; los griegos empezaron con algunos cálculos que relacionaban magnitudes, desarrollando algunas ideas basadas en la existencia de cantidades dependientes e independientes, sin señalarlas explícitamente⁵⁸; es evidente que antes de formalizar el concepto trabajaron con situaciones en las que se identificaba la dependencia entre dos cantidades, pero aun así no salieron a flote nociones que mencionaran de manera explícita las variables o incluso funciones⁵⁹.

Aunque el surgimiento de la noción de función se dio desde la antigüedad, en el campo de la matemática se formalizó muy recientemente, de manera que no tendría mucho sentido presentar el concepto de función como un ente abstracto⁶⁰, dejando de lado todo el proceso histórico que ha vivido, el cual dio inicio por la necesidad de comprender situaciones cotidianas, y justamente en la actualidad

55 Azcárate y Deulofeu, *Funciones y gráficas*.

56 Posada y Villa, “El razonamiento algebraico”.

57 Fernando Hitt, *Funciones en contexto*, México: Pearson Educación, 2002.

58 Patricia Sastre Vázquez, Graciela Rey y Carolina Boubée, “El concepto de función a través de la Historia”, *Unión-Revista iberoamericana de educación matemática*, n.º 16, 2008: 143.

59 Azcárate y Deulofeu, *Funciones y gráficas*.

60 Yadira Marcela Mesa, “El concepto de función cuadrática: un análisis de su desarrollo histórico” (Tesis de licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas, Universidad de Antioquia, 2008) <http://ayura.udea.edu.co:8080/jspui/bitstream/123456789/939/1/JC/0538.pdf>. (Consultado el 4 de febrero de 2018)

ha revelado el potencial que tiene para modelar el mundo y describir diferentes fenómenos⁶¹.

En consecuencia, se propone entonces la modelación matemática para abordar situaciones que le permitan al estudiante acercarse al concepto de función, ya que precisamente toma como punto de partida la relación existente entre las variables o cantidades que intervienen en determinada situación. En definitiva, esta delimitación teórica se tomó como base para tratar de contribuir en el aprendizaje del concepto de función a través de la modelación matemática, implementándola desde escenarios exploratorio-investigativos y asumiendo dos etapas en el ciclo de modelación, por lo que a continuación se describe lo ocurrido al implementar las actividades para reconocer dicha contribución.

1.3 ¿QUÉ OCURRIÓ EN EL AULA DE CLASE DE MATEMÁTICAS?

La aplicación de las situaciones de enseñanza implicó el diseño de tres escenarios investigativos. El primer escenario se diseñó desde la referencia señalada por Skovsmose⁶², de las matemáticas en sí mismas.

Primera situación de enseñanza.

Realizar un rectángulo con un perímetro de 24 centímetros y calcular su área.

Responder las siguientes preguntas:

- *¿Cuántos rectángulos con perímetro de 24 centímetros pueden construirse?*
- *¿Existe relación entre las dimensiones de los rectángulos y su respectiva área?*
- *¿De qué manera(s) se podría representar dicha relación?*
- *¿Cuál es el rectángulo de mayor área que se puede construir?*

61 William J. Ugalde, "Funciones: desarrollo histórico del concepto y actividades de enseñanza aprendizaje", *Matemática, Educación e Internet*, vol. 14, n.º 1, 2014: 2.

62 Skovsmose, "Escenarios de investigación".

- ¿Será posible determinar una manera que permita hallar el área de cualquiera de los rectángulos conociendo la medida de uno de sus lados? ¿Sí, no, por qué?

Este escenario investigativo se identifica como una tarea de carácter exploratorio, que tiene un grado de dificultad accesible y una dimensión abierta⁶³. En el desarrollo de esta secuencia los estudiantes reconocieron que las variables a considerar principalmente eran el largo y el ancho, clasificando relaciones entre éstas. Por ejemplo, la diferencia entre los valores del largo y el ancho, es inversamente proporcional al área del rectángulo respectivo; es decir, al tomar diversos rectángulos y verificar la diferencia entre dichas dimensiones, se encontró que, si esta es mínima, los rectángulos tendrán las mayores áreas. A continuación, la intervención de la estudiante que identificó esta relación (en adelante, la simbología <n>, en una transcripción, indica que en ese instante hubo un lapso de tiempo con n segundos de silencio).

1. *David*. —¿Existe relación entre las dimensiones de los rectángulos y su respectiva área? ¿De qué manera se podría representar dicha relación?

<3>

2. *Karol*. —Eeeh, si se tiene una relación ya que entre menor sea la diferencia entre el largo y el ancho, mayor es su área, y viceversa, es decir, que entre mayor sea la diferencia entre el largo y el ancho, menor es su área.⁶⁴

La tabla mostrada en la figura 1 permite visualizar claramente dicha relación.

63 Da Ponte, “Problemas e investigaciones”.

64 Transcripción de grabación en audio n.º 2, 2018.

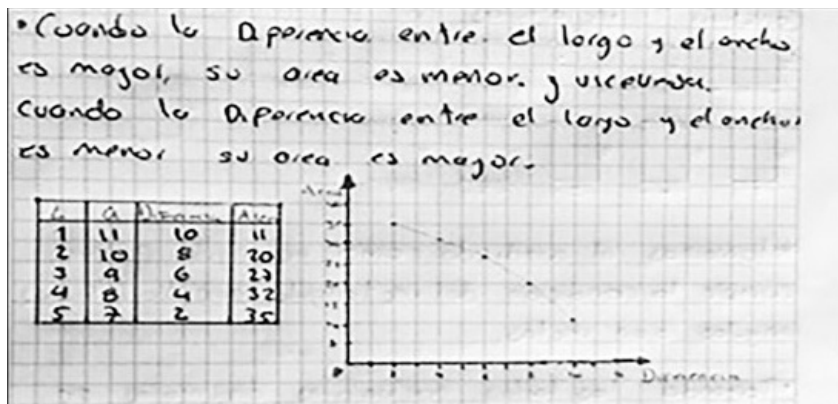


Figura 1. Relación entre el área y las dimensiones de cada rectángulo.
Fuente: Elaborado por Camilo.

Así mismo, los estudiantes establecieron que la diferencia entre el largo y el ancho siempre es par; es de recalcar que, tanto en los audios como en los pliegos de los estudiantes, aclaran que la relación solo aplica para los valores enteros.

24. *Camilo*. —Entre el largo y el ancho.

25. *Karol*. —Mayor es...

26. *Camilo*. —Su diferencia siempre va a ser par.

<3>

27. *Marcela*. —Encontramos que en los valores enteros la diferencia siempre es par, ¿no? Porque si no, podemos tomar todos los valores.⁶⁵

⁶⁵ Transcripción de grabación en audio n.º 2, 2018.

• Si hacemos la diferencia entre el largo y ancho del rectángulo encontramos que en los valores enteros la diferencia nos da un número par.

B	L	Diferencia	Área
11	1	10	11
10	2	8	20
9	3	6	27
8	4	4	32
7	5	2	35

Figura 2. Diferencia entre las dimensiones que son valores enteros.
Fuente: Elaborado por Marcela.

Se identificó entonces una relación entre las dimensiones que son valores enteros, es decir, una característica que estas deben tener para que la relación encontrada sea válida, la cual consiste en que sean números enteros; así la diferencia entre estas dimensiones siempre será un número par (figura 2), sin dejar de lado el hecho de que son infinitas las posibilidades de construir rectángulos que tengan 24 cm de perímetro. Como elemento final de esta primera etapa del ciclo de modelación se reconoció el planteamiento de fórmulas auxiliares en la construcción del modelo matemático que representa la situación.

32. *Camilo*. —Bueno, podemos concluir que ya tenemos perímetro.

33. *Marcela*. —Será... pero escribamos la pregunta, ¿ya está grabando? Ah [risas]... entonces, ¿será posible determinar una manera que permita hallar el área de cualquiera de los rectángulos conociendo la medida de uno de sus lados? Sí no, ¿por qué?... En este caso sí podemos hallarla, ya que tenemos el perímetro.

34. *Camilo*. —Porque ya tenemos la, el perímetro.

35. *Karol*. —Perímetro.

36. *Marcela*. —Que es igual a 24 cm, entonces si nos dan uno de sus lados, sería ya con la fórmula.

37. *Camilo*. —El perímetro y con uno de sus lados reemplazaríamos prácticamente en la fórmula.

38. *Marcela*. —Hallar el otro lado.

39. *Karol*. —Y se puede hallar, claro.

40. *Camilo*. —Bueno, entonces primero coloquemos eso y hacemos el ejercicio con la fórmula.

41. *Marcela*. —Sería, sí, de la fórmula del perímetro hallar el lado que no conocemos y ese lado pues ya lo multiplicamos para dar el área como tal del rectángulo.⁶⁶

En el fragmento anterior se pone en evidencia cómo los estudiantes identifican un punto de partida en el hecho de que se conoce el perímetro de los rectángulos y la utilidad que este tiene para esbozar una posible manera de determinar el área de cualquiera de los rectángulos, teniendo solo una de sus dimensiones. Así, plantean una expresión específica para determinar las dimensiones de cada rectángulo.

65. *Camilo*. —Listo... entonces, utilizamos la primera fórmula que es la del perímetro, ¿no?, que es...

66. *Marcela*. —Perímetro es igual a dos veces "a" por dos veces, más, "L".

67. *Camilo*. —Dos veces "a"... "L" entonces reemplazamos perímetro.

68. *Marcela*. —24 es igual a...

69. *Camilo*. —24 es igual a... digamos que siete, sí, coloquemos siete, al azar.

70. *Marcela*. —O lo podemos dejar expresado, o sea, pasar todo en términos de... ah, no.

71. *Camilo*. —No, nos dan uno de sus lados, coloquemos siete como ejemplo, ¿o qué otro número?... sí, siete, ¿no?

72. *Marcela*. —Sí.

73. *Camilo*. —Entonces dos por siete.

74. *Marcela*. —Es igual a "zeta", entonces dos siete por dos "L", el 24 es igual a...

<17>

75. *Camilo*. —Entonces despejemos.

76. *Karol*. —14.

77. *Camilo*. —24, 14.

66 Transcripción de grabación en audio n.º 4, 2018.

78. *Marcela.* —14 por 2.
 79. *Camilo.* —Por 2, sí.
 80. *Marcela.* —14 por 2.
 81. *Camilo.* —28.
 82. *Marcela.* —¿28?
 83. *Camilo.* —Sí.
 84. *Marcela.* —¿Sí se puede multiplicar así, cierto?
 85. *Camilo.* —No porque no son de los mismos valores.
 86. *Marcela.* —¿No?
 87. *Camilo.* —No, tenemos que pasar “L” para el otro lado.
 88. *Marcela.* —Ah, espere, espere, ya sé... sería 24 sobre 14, igual a 2 “L”.⁶⁷

Si podemos hallar el área del... cualquiera de los rectángulos que tienen el perímetro y uno de sus lados del rectángulo.

$$\text{Perímetro} = 2a + 2L$$

$$24 = 2(\cdot) 2L$$

$$24 = 14 + 2L$$

$$\frac{24-14}{2} = L$$

$$L = 5 \text{ cm}$$

$$24 = 2a + 2L$$

$$L = \frac{24 - 2a}{2}$$

o Se puede hacer de la misma manera si nos dan el largo

Figura 3. Cómo hallar la dimensión que hace falta para determinar el área. Fuente: Elaborado por Karol.

A pesar de que en la línea 88 de la transcripción se dice que 24 se divide en 14, esto no es lo que se plasma en los pliegos (figura 3); es decir, se tenía la idea clara de cómo plantear la expresión, pero al expresarla no hubo claridad. En este caso tomaron como ejemplo 7 cm como una de las dimensiones de cierto rectángulo, y determinaron el valor de la otra dimensión a través de la expresión que el grupo formuló, la cual es de utilidad; sin embargo, no se plasmó un

67 Transcripción de grabación en audio n.º 4, 2018.

posible modelo matemático que permitiera hallar el área de determinado rectángulo.

El segundo escenario se diseñó bajo la referencia de la semirrealidad señalada por Skovsmose⁶⁸.

Segunda situación de enseñanza

Tome una hoja de papel de forma rectangular y construya una caja sin tapa recortando cuadrados en sus esquinas.

Responder las siguientes preguntas:

- *¿Cuál es el volumen de la caja?*
- *¿Utilizando el mismo tamaño de la hoja de papel se podrán construir cajas con diferente volumen?*
- *¿Con hojas de diferente tamaño se podrán construir cajas de igual volumen?*
- *Compare sus respuestas con dos de sus compañeros.*

Este escenario investigativo se identifica como una tarea investigativa, catalogada como una tarea difícil pero aun así con dimensión abierta⁶⁹. En el desarrollo de esta secuencia, el grupo eligió para la construcción de la caja una hoja de 17 cm de ancho por 24 cm de largo, y para la caja inicial recortaron cuadrados de 3 cm en las esquinas de la hoja, por lo que obtuvieron una caja con un volumen de $594 \text{ cm}^3 = 3 \text{ cm} \times 17 \text{ cm} \times 24 \text{ cm}$. Luego procedieron a encontrar una manera de hallar el volumen de cualquiera de las cajas que se podía construir con la hoja de las dimensiones que eligieron. El siguiente diálogo muestra las interacciones realizadas por los estudiantes al tomar el literal b). de la actividad:

1. *David.* —b). ¿Utilizando el mismo tamaño de la hoja de papel se podrían construir cajas con diferente volumen? De ser así, ¿cómo se podría determinar el volumen de cualquiera de esas cajas?

68 Skovsmose, “Escenarios de investigación”.

69 Da Ponte, “Problemas e investigaciones”.

2. *Camilo*. —Bueno, la fórmula que... ¿cuál es la fórmula que en sí está pensando?, porque entonces...
3. *Marcela*. —Pues sería... o sea...
4. *Camilo*. —Del alto... del ancho y del alto tenemos que colocarle “menos $2x$ ”.
5. *Marcela*. —O sea, tomamos, o sea, hacemos una... representación igual que en el punto anterior, pero en vez de tomar como 3 centímetros, ponerlo en x porque, pues, puede ser cualquier número.
6. *Camilo*. — x ... sí.
7. *Marcela*. —Entonces, de acuerdo a eso, pues saquemos el ancho, ¿el largo? ¿Sí?
8. *Camilo*. —¿O sea, igual que la hoja? ¿24 por 17?
9. *Marcela*. —Sí, que, que... ajá.
10. *Camilo*. —Pero entonces sería la fórmula, sería volumen igual a x por once menos x , menos $2x$, por 18, por 24, menos $2x$.
11. *Marcela*. —Pues verifiquémosla, pues sacando de nuevo esto, ¿no?
12. *Camilo*. —Entonces, mire, por lo menos sería aquí, ‘pere, una hoja, aquí.
13. *Karol*. —¿Pero, es que luego no es el 3?
14. *Camilo*. —Volumen sería, yo lo que pienso, hacer así.
15. *Marcela*. —¿Cómo así? =
16. *Karol*. —Ese 3.
17. *Camilo*. —No, pare bolas.
18. *Marcela*. —No, o sea, es que, o sea, el punto de ahorita sería, o sea, como si no tomáramos 3 centímetros sino cualquier valor, bueno...
19. *Camilo*. —... x , exacto.
20. *Karol*. —Ah, ya.
21. *Camilo*. —Entonces sería, lo que yo pienso es x por 24 menos $2x$, ¿sí?
22. *Marcela*. —Ujum.
23. *Camilo*. —Eso, normal, así, por 17 menos.
24. *Marcela*. — $2x$.
25. *Camilo*. —¿ $2x$?, ¿por qué $2x$?

26. *Marcela*. —Porque... se quitan de lado a lado los..., la medida del cuadrado.

27. *Camilo*. —Exacto.

28. *Karol*. —Ahí ya varía... para cualquiera... varía acá este número.⁷⁰

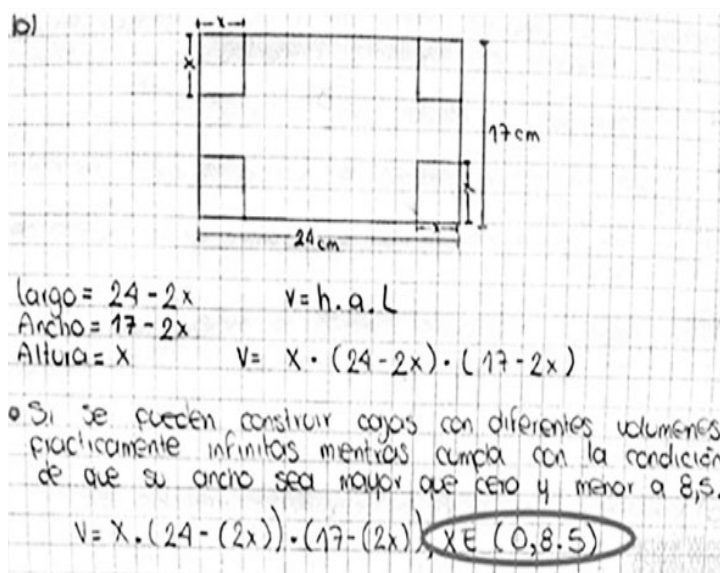


Figura 4. Volumen de determinada caja. Fuente: Elaborado por David.

En el fragmento de la transcripción de la grabación en audio n.º 6, específicamente en las líneas 21 a 24, se define el modelo matemático que permite hallar el volumen de determinada caja, claro, construida a partir de una pieza rectangular con dimensiones de 17 cm x 24 cm. Así mismo, se argumenta por qué en dicho modelo se debe usar la expresión “ $2x$ ”, teniendo en cuenta que la variable “ x ” representa las dimensiones de los rectángulos que se recortan en las esquinas de la hoja para construir la caja, aspecto que se evidencia en la figura 4. De esta manera, se puede decir que en la primera etapa del ciclo de modelación se evidenció a cabalidad en esta segunda actividad, a diferencia de lo sucedido en la anterior, ya que, junto al modelo mate-

70 Transcripción de grabación en audio n.º 6, 2018.

mático, se reconocieron relaciones entre las variables y se definieron los valores que puede tomar la variable independiente (figura 4).

Respecto al reconocimiento de relaciones entre variables, los estudiantes identificaron que el volumen de cada caja varía de acuerdo con el tamaño de los cuadrados que se recorten en las esquinas de la hoja para construirla, lo cual se originó a partir del siguiente diálogo.

39. *Camilo*. —Estamos tomando mal las medidas, porque nosotros lo tomamos de una vez completa la hoja.

40. *Marcela*. —Es que...

41. *Camilo*. —Las dimensiones de la hoja.

42. *Marcela*. —Ah sí, o sea, el anterior nos quedó, no, ¿sí?

43. *Camilo*. —Nos quedó mal.

44. *Marcela*. —Ujum.

45. *Karol*. —Ah sí, porque es el volumen como tal de la caja ya hecha, no de la hoja.

[risas]

46. *Marcela*. [risa].

47. *Camilo*. —Sí, nos quedó mal, estamos tomando las medidas... estamos tomando las medidas de la hoja completa.

48. *Marcela*. —O sea, tendríamos que... o sea, tendríamos... o sea, ¿en el punto anterior tenemos que restarle esos 3 centímetros que le quitamos?

49. *Camilo*. —Literal.

50. *Marcela*. —Acá, al largo y al ancho.

51. *Karol*. —O sea, a la medida como tal de la...

52. *Camilo*. —No, no, 3 centímetros no, 6 centímetros.

53. *Marcela*. —No, porque, o sea, 3 al...

54. *Camilo*. —Son por lado y lado, 3 y 3 son 6.

55. *Karol*. —Ah, 6, 6, ah sí.

56. *Marcela*. —6 al ancho y 6 al largo.

57. *Karol*. —Ah, sí.

58. *Camilo*. —3 por ambos lados, bien sea por derecha o izquierda, son 6.

59. *Marcela*. —Sí, bueno, entonces arreglemos eso... llegando al punto b fue que tuvimos en cuenta que, o sea, de acuerdo a la variación que tomábamos de los cuadrados que íbamos a recortar, o sea, iba variando el volumen y {“riendo” ahí, no sé, fue que no tuvimos en cuenta} de restarle a las medidas de la hoja los centímetros de los cuadrados que recortamos.⁷¹

Por otro lado, al buscar establecer los valores que podía tomar la variable “ x ”, los estudiantes reconocieron que, al dividir 17 entre 2, obtendrían el valor de referencia para establecer de qué tamaños se podrían recortar los cuadrados para construir diferentes cajas; además, en el siguiente fragmento, en las líneas 44 a 50, el estudiante le explica a su compañera por qué razón no se puede hacer el mismo procedimiento tomando la otra dimensión, es decir, el valor de 24, ya que si este se toma solo se podría recortar un cuadrado de 12 cm y esto anularía por completo la posibilidad de construir una caja, por lo que a continuación se presenta el diálogo a través del cual se estableció lo que comúnmente se conoce como *dominio* de la función.

32. *Camilo*. —O sea, ¿hasta... hasta qué valor podríamos coger ese x ? Ese debe tener un límite.

33. *Marcela*. —Ajá.

34. *Karol*. —Entonces, toca hacerle...

35. *Camilo*. — x debe llegar, o sea, hasta aquí, o sea, donde llegue aquí, antes de llegar a... al centro de acá, tiene que ser menor a ese número.

36. *Marcela*. —O sea, el... espere.

37. *Camilo*. —O sea, el menor, 17 dividido en 2.

38. *Marcela*. —Pero ahí...

39. *Camilo*. —17 dividido en 2 sería 8,5, ¿cierto? Entonces, tiene que ser menor que 8,5, no puede ser igual a 8,5.

40. *Marcela*. —Y mayor a cero.

41. *Camilo*. —Y mayor que cero.

42. *Marcela*. —Porque tampoco puede quedar en cero.

71 Transcripción de grabación en audio n.º 6, 2018.

43. *Camilo*. —Sí, exacto, debe ser una condición esa.
44. *Marcela*. —Y el otro... pues con el otro... lado igual, ¿no?, 24, ¿no?
45. *Camilo*. —A 24, no.
46. *Marcela*. —¿No?
47. *Camilo*. —No porque es que si llega hasta aquí, porque estamos restando es cuadrados.
48. *Marcela*. —Ah sí, sí.
49. *Camilo*. —Si es la medida de acá, va a ser la misma para este lado.
50. *Marcela*. —Ah, la misma en todos los lados, sí.
51. *Camilo*. —Entonces sí sería esa, o sea, esa sería una condición.
52. *Marcela*. —Y como esa es la menor, sí.⁷²

El tercer escenario se diseñó bajo la referencia de lo real señalada por Skovsmose⁷³. Esta secuencia fue diseñada por los estudiantes y su planteamiento respondió a reconocer que “la función es un instrumento que permite modelar y solucionar diferentes situaciones del mundo real”⁷⁴, en este caso las ventas ambulantes.

Tercera situación de enseñanza

Determinar los ingresos aproximados de las personas que se dedican a la venta del producto Bonice.

Al igual que el segundo escenario, este se cataloga como una tarea de investigación, difícil y su dimensión es abierta⁷⁵. En este caso, el tema que se eligió fue la venta ambulante de productos Bonice; de acuerdo con la información que proporcionaron los estudiantes a

⁷² Transcripción de grabación en audio n.º 6, 2018.

⁷³ Skovsmose, “Escenarios de investigación”.

⁷⁴ Lida Riscanevo Espitia, Kelly Johana Cristancho Cruz y Claudia Patricia Fonseca Ochoa, “Influencias del contrato didáctico en el aprendizaje del concepto de función”, *Praxis & Saber*, vol. 2, n.º 3, 2011: 123.

⁷⁵ Da Ponte, “Problemas e investigaciones”.

través de las grabaciones en audio y el informe final de la actividad, las personas que se dedican a este trabajo venden cinco productos: Popetas grandes, Popetas pequeñas, Bonice pequeño, Bonice sencillo y Bonice doble⁷⁶; cada producto tiene un precio y una comisión de venta distintos, y los estudiantes se propusieron analizar los ingresos aproximados de estas personas, para compararlos con el salario mínimo. El primer acercamiento a la formulación del modelo para describir la situación se da a continuación.

18. *Marcela*. —Modelar esos cinco productos por la cantidad de pro..., o sea, de acuerdo, bueno...

19. *Camilo*. —Pues un modelo de ecuación el cual, tomando solo la ganancia...

20. *Marcela*. —Sí.

21. *Camilo*. —¿Del cual, cuánto obtuvo en el día y cuánto necesita vender, aproximadamente?

22. *Karol*. —De cada producto.

23. *Camilo*. —De cada producto.

24. *Marcela*. —En función de cada, de la cantidad de...

25. *Camilo*. —Y una de todo.

26. *Karol*. —*Ujum*.

27. *Marcela*. —Sí.

28. *Karol*. —O sea, uno de cada uno de cuánto necesita vender, más o menos.⁷⁷

A pesar de que en el fragmento anterior la estudiante en la línea 24 no termina su oración, se puede comprender que identifica la cantidad de productos vendidos como la variable independiente en el modelo, lo cual se confirma más adelante:

76 Bonice es el nombre de una línea de productos comestibles que se distribuye en Colombia, consistentes en una barra congelada preparada con variedad de sabores y tres tamaños distintos; las Popetas son rosetas de maíz tostado y reventado listas para el consumo, que también ofrecen diversos sabores y dos presentaciones en el tamaño.

77 Transcripción de grabación en audio n.º 10, 2019.

75. *Docente*. —Entonces, vuelve la pregunta: ¿qué valor va acá? ¿A qué valor respondería ese?

76. *Marcela*. —La cantidad de productos.

77. *Camilo*. —A la cantidad de Popetas que vendió, pero entonces se...

78. *Docente*. —¿En qué unidad de tiempo?

79. *Camilo*. —Entonces, la unidad de tiempo no va a interesar.

80. *Marcela*. —Pues eso uno la...

81. *Camilo*. —Porque si yo coloco las... cuántos vendió semanal y coloco la del mes, no va variar, o sea, lo único que varía es en la cantidad, ¿sí?, pero entonces no hay ningún cambio.⁷⁸

Sin embargo, esta propuesta cambia unos minutos después, ya que a los vendedores de Bonice les dan un bono diario de cinco mil pesos, por lo que este dinero debía contemplarse en el modelo matemático que se supone iba a representar los ingresos, aunque en este caso se establecieron cinco modelos matemáticos, teniendo en cuenta que cada producto genera ingresos diferentes, así que el modelo final depende de la cantidad de productos vendidos a la semana, lo cual se evidencia tanto en la grabación de audio como en el informe entregado por los estudiantes.

61. *Camilo*. —Aunque, mejor dicho, por día son mil pesos por producto.

62. *Marcela*. —¿Por día?

63. *Camilo*. —Claro.

64. *Marcela*. —Mil pesos ¿cómo?

65. *Camilo*. —Claro, si me dan cinco mil y son cinco productos.

66. *Karol*. —Ah, sí.

67. *Marcela*. —¡Ay, sí!

68. *Camilo*. —¡Claro!

69. *Marcela*. —¡Ay sí!

78 Transcripción de grabación en audio n.º 11, 2019.

70. *Camilo*. —O sea que nos ponemos a hacer esta otra fórmula, entonces sería... lo vamos a hacer la fórmula, hagámosla exacta, ¿sí o no?

71. *Marcela*. —*Ujum*.

72. *Camilo*. —Que sea, ¿qué, semanal?

73. *Marcela*. —Semanal.

74. *Camilo*. —Entonces son siete mil pesos, entonces, en vez de “más y”, aquí más siete mil, nos da, números reales, siete mil, son siete días ¿no?... y listo, y ahí sí al final solo sumar.⁷⁹

PRODUCTOS	PRECIOS	GANANCIAS
Popetas Grandes	\$ 1000	\$ 160
Popetas Pequeñas	\$ 500	\$ 80
Boníes Pequeño	\$ 200	\$ 70
Boníes Sencillo	\$ 400	\$ 80
Boníes Doble	\$ 500	\$ 100

• Boníes pequeño: b: Cantidad de Boníes pequeño vendidos por semana. $B(b) = (70 * b) + 7000$ • Boníes sencillo. s: Cantidad de Boníes sencillo vendidos por semana. $B(s) = (80 * s) + 7000$ • Boníes doble: d: Cantidad de Boníes Doble vendido por semana. $B(d) = (100 * d) + 7000$	• Popetas grandes: g: Cantidad de popetas grandes vendidas por semana. $P(g) = (160 * g) + 7000$ • Popetas pequeñas: q: Cantidad de popetas pequeñas vendidas por semana. $P(q) = (80 * q) + 7000$
---	--

Figura 5. Modelos matemáticos para los ingresos. Fuente: Elaboración grupal de los estudiantes.

Teniendo en cuenta el hecho de que la función es útil para modelar diferentes situaciones⁸⁰, en el ciclo de modelación se tiene una segunda etapa, que consiste precisamente en validar el modelo matemático que se obtiene, con el fin de verificar que realmente describe la situación de la que se originó.

Aunque en la primera situación de enseñanza no se dio esta segunda etapa, ya que no se formuló un modelo matemático específico, en la segunda situación, a partir del modelo obtenido los estudiantes

79 Transcripción de grabación en audio n.º 12, 2019.

80 Skovsmose, “Escenarios de investigación”.

tomaron como ejemplo la caja inicial que construyeron, es decir, el valor para la variable independiente, que en la función representa la altura, fue de 3 cm; a través del modelo calcularon los valores del ancho y del largo de la caja, comprobando que en efecto eran 11 y 18 cm respectivamente; en consecuencia, el valor que obtuvieron fue de 594 cm^3 , que es precisamente el volumen que habían determinado inicialmente, sin tener todavía el modelo matemático. Esta validación la proporcionaron a modo de conclusión.

67. *Marcela*. —En conclusión, nuestro rectángulo, bueno, nuestro rectángulo tiene las siguientes dimensiones: el rectángulo sin cortar los cuadrados, el ancho es igual a 17 centímetros y el largo es igual a 24 centímetros; quitamos cuadrados de 3 centímetros por 3 centímetros, y las medidas de la caja sería: el largo que es igual a 24 centímetros menos 6 centímetros de las medidas del cuadrado que quitamos, que da un total de 18 centímetros de largo y el ancho sería 17 centímetros menos 6 centímetros de los cuadrados, que nos da un ancho igual a 11 centímetros; el volumen de la caja será igual a: volumen igual a altura por el ancho por el largo, en nuestra caja sería el volumen igual a 3 centímetros por 11 centímetros por 18 centímetros, dándonos un total de 594 centímetros cúbicos.⁸¹

En cuanto a la tercera situación, la validación del modelo se llevó a cabo verificando los ingresos por concepto del bono diario de cinco mil pesos, los cuales equivalen a treinta y cinco mil pesos semanales, y esto debía estar presente al sumar los ingresos obtenidos a través de cada modelo matemático. Así pues, teniendo en cuenta que los cinco modelos que se establecieron correspondían a los ingresos semanales por cada producto, se concluyó entonces que por cada uno había un bono de siete mil pesos a la semana, y se verificó que en efecto se obtenían treinta y cinco mil pesos que eran fijos en los ingresos:

87. *Marcela*. —Son mil, son mil por día.

88. *Camilo*. —Son mil por día, mil pesos por siete días.

81 Transcripción de grabación en audio n.º 7, 2018.

89. *Marcela*. —Siete por cinco treinta y cinco, sí. Ahí está.

90. *Karol*. —Ah sí, da lo mismo.

91. *Camilo*. —Claro [risas].⁸²

Para finalizar, en esta primera parte del análisis de los datos cabe mencionar que los avances que se evidenciaron en cuanto a la formulación del modelo matemático y las especificaciones sobre las variables, se relacionan con el hecho de que, para que los estudiantes tengan acceso a las definiciones matemáticas deben imitar el proceso histórico; es decir, construir definiciones en contextos empíricos para luego refinarlas y establecerlas de manera formal⁸³.

El educador en matemáticas promueve la elaboración e interpretación de modelos, con el ánimo de construir un concepto matemático dotado de un significado, y con la intención de despertar una motivación e interés por las matemáticas debido a la relación que esta área del conocimiento tiene con los problemas del contexto real de los estudiantes.⁸⁴

Desde este punto de vista podría decirse que la modelación, al partir de las aplicaciones de la matemática, es una herramienta útil para tratar de imitar algunas características de la evolución histórica del concepto de función, lo cual puede resultar favorable para el aprendizaje del mismo⁸⁵.

1.4 REFLEXIONES FINALES

Teniendo en cuenta que el ciclo de modelación comprende dos etapas, se realizó el análisis de la información para cada una de ellas. En la primera se da la identificación de las variables de la situación,

82 Transcripción de grabación en audio n.º 12, 2019.

83 David Tall y Shlomo Vinner, 2002, citados en Orlando Aya Corredor, Armando Echeverry Gaitán y Carmen Samper, “¿Es el cuadrado un rectángulo?”, *Sophia*, vol. 12, n.º 1, 2016: 141.

84 Villa Ochoa y Ruiz Ramos, “Modelación en educación matemática”, 4.

85 Ugalde, “Funciones: desarrollo histórico del concepto”.

tanto dependientes como independientes, por lo que se consideraría que en esta etapa el acercamiento al concepto de función es evidente, ya que “las funciones surgen siempre que una cantidad depende de otra”⁸⁶, y las dificultades en su aprendizaje se deben precisamente a la confusión entre variable dependiente e independiente⁸⁷; desde este punto de vista, la modelación matemática podría contribuir en la diferenciación de estas cantidades.

Los referentes teóricos tenidos en cuenta permiten apreciar, por ejemplo, que a través del trabajo en grupo se puede fortalecer el diálogo y la comunicación, favoreciendo el debate sin dejar de lado la tolerancia, la igualdad, que a su vez hacen parte de los valores democráticos que Skovsmose⁸⁸ menciona como ingrediente importante en el aula de clase de matemáticas. Así mismo, la modelación matemática llega a ser una herramienta útil para poner en juego los aspectos citados anteriormente.

Por lo otro lado, para Trigueros⁸⁹, la modelación permitiría motivar a los estudiantes a investigar y cuestionarse acerca del papel que tienen las matemáticas en la sociedad, así que se plantea el hecho de que la modelación matemática también tendría un enfoque crítico, ya que a través de esta es posible proporcionar herramientas a los estudiantes para que, como ciudadanos en continua formación, estén facultados para actuar y transformar su entorno⁹⁰, desarrollando su capacidad crítica de análisis ante diferentes demandas sociales, al interpretar datos y leer diferentes situaciones, proponer y probar hipótesis, y plantear y validar modelos; además, fortaleciendo la autonomía de

86 James Stewart, *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas*, México, D. F.: Cengage Learning Editores, 2012, 10.

87 Paola González Burón, “Dificultades en el aprendizaje de las funciones en matemáticas” (Tesis de maestría en Formación del Profesorado de Educación Secundaria, Universidad de Cantabria, 2015) <https://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/6893/Gonz%C3%A1lezBuronPaula.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. (Consultado el 11 de noviembre de 2017)

88 Skovsmose, *Hacia una filosofía*.

89 Trigueros Gaisman, “El uso de la modelación”.

90 Milton Rosa, Frederico da Silva Reis y Daniel Clark Orey, “A modelagem matemática crítica nos cursos de formação de professores de matemática”.

los estudiantes, ampliando su visión del entorno, se contribuye con el ejercicio pleno de su ciudadanía⁹¹.

De igual forma, se podría decir que la modelación matemática, los escenarios de investigación y las tareas de exploración, tienen en común que el punto de partida no son los algoritmos matemáticos para luego ejercitar su uso a través de diferentes situaciones, sino que estos surgen a lo largo del proceso de exploración e indagación, por lo que la modelación se puede incorporar en el aula de clase también bajo los supuestos de la Educación Matemática Crítica.

En cuanto al aprendizaje del concepto de función, la modelación contribuye en el reconocimiento del vínculo entre las variables que intervienen en cada caso, además de contribuir a identificar las variables dependiente e independiente, y los aspectos que diferencian una de la otra⁹², por lo que también podría permitir el tránsito entre las diferentes representaciones de la función, de acuerdo con la interpretación que se le dé a determinada situación.

Finalmente, según Cantoral⁹³, la labor de enseñanza debería enfocarse en la creación de condiciones que le permitan al estudiante apropiarse del conocimiento, aspecto en el que los escenarios exploratorio-investigativos podrían ser de gran utilidad, ya que el proceso de exploración inmerso en este tipo de actividades permite al estudiante reconocer los aspectos que desconoce y que, aun así, se requieren para dar solución a determinada situación⁹⁴, y a través de la indagación busca explicaciones con el fin de aclarar sus dudas⁹⁵.

91 Clark Orey y Rosa, "A dimensão crítica da modelagem", 203.

92 Lida Riscanevo Espitia y Yuri Carolina Niño Castillo, "La modelación matemática en escenarios exploratorio-investigativos para el aprendizaje del concepto de función", *Voces y Realidades*, n.º 2, 2018.

93 Cantoral, "Enseñanza de la matemática".

94 Leonor Camargo, "Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria" (Tesis de doctorado en Didáctica de la matemática, Universidad de Valencia, 2010) <http://funes.uniandes.edu.co/960/1/Camargo2010.pdf>. (Consultado el 27 de agosto de 2018)

95 Skovsmose, "Escenarios de investigación".

Esto también va en concordancia con la que Cárdenas y Muñoz⁹⁶ consideran la misión de las matemáticas, centrada en fortalecer las capacidades de los estudiantes para crear, descubrir y transformar.

1.5 BIBLIOGRAFÍA

Fuentes documentales impresas

Hein, Nelson y María Salett Biembengut. “Modelaje matemático como método de investigación en clases de matemáticas”, en *Memorias del V Festival Internacional de Matemática*, 1-25. Puntarenas (Costa Rica), 2006.

Hitt, Fernando. “Dificultades en el aprendizaje del cálculo”, en *Encuentro de profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior*, 1-25. Morelia (México): Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo, 2003.

Jiménez, Marianao y Arantxa Areizaga, “Reflexiones acerca de los obstáculos que aparecen, en la enseñanza de las matemáticas, al pasar del bachillerato a la universidad”, en *Acta de IX Jornada de ASEPU-MA*, 1-10. Guipuzcoa, 2001.

López, Jesús y Landy Sosa, “Dificultades conceptuales y procedimentales en el aprendizaje de funciones en estudiantes de bachillerato”, en *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 308-318. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, 2008.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN), “Lineamientos Curriculares - Matemáticas”, Bogotá, 1998.

Rodríguez, Ruth, Samantha Quiroz y Lorenza Illanes, “Competencias de modelación y uso de tecnología en ecuaciones diferenciales”, en

96 Yuliana Raquel Cárdenas Sierra y Diego Alejandro Muñoz Restrepo, “Educación Matemática Crítica y análisis didáctico: una propuesta de construcción de saberes matemáticos en contextos de conflicto social en la Institución Educativa Nuevo Horizonte de la ciudad de Medellín” (Tesis de maestría en Educación Matemática, Universidad de Medellín, 2014), 17.

Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 2121-2128. México, D. F.: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, 2013.

Sánchez Robayo, Brigitte y José Torres Duarte, “Educación Matemática Crítica: un abordaje desde la perspectiva sociopolítica a los ambientes de aprendizaje”, en *Acta del X Encuentro Colombiano de Matemática Educativa*, 1-11. Pasto: Asocolme, 2009.

Valero, Paola, “¿De carne y hueso? La vida social y política de la competencia matemática”, en *Memorias del Foro Educativo Nacional de Colombia - Competencias Matemáticas*, 1-16. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN), 2006.

Vasco, Carlos Eduardo, “El pensamiento variacional y la modelación matemática”, en *Conferencia Interamericana de Educación Matemática (CIAEM)*, 2009-2022, 2003.

Zeichner, Kenneth, “El maestro como profesional reflexivo”, en *11^o University of Wisconsin Reading Symposium: «Factors Related to Reading Performance»*, 44-49. Traducido por Pablo Manzano Bernárdez. Wisconsin, 1993.

Libros

Alro, Helle y Ole Skovsmose. “Aprendizaje dialógico en la investigación colaborativa, en *Educación Matemática Crítica: una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas*, compilado por Paola Valero y Ole Skovsmose, 149-171. Bogotá: Universidad de los Andes / Aalborg University, 2012.

Azcárate Giménez, Carmen y Jordi Deulofeu Piquet. *Funciones y gráficas*. Madrid: Editorial Síntesis, 1996.

Da Ponte, João Pedro. “Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos”, en *La actividad matemática en el aula: homenaje a Paulo Abrantes*, editado por Leonor Santos, Joaquim Giménez Rodríguez y João Pedro da Ponte, 25-34. Barcelona: Graó, 2004.

Font, Vicenç. “Funciones”, en *Matemáticas, Complementos de formación disciplinar*, coordinado por Jesús María Goñi, 145-185. Barcelona: Graó, 2011.

Hernández Sampieri, Roberto, Carlos Fernández Collado y Pilar Baptista Lucio. *Metodología de la investigación*. México: McGraw-Hill, 2014.

Hitt, Fernando. *Funciones en contexto*. México: Pearson Educación, 2002.

Latorre, Antonio. *La investigación-acción. Conocer y cambiar la práctica educativa*. Barcelona: Graó, 2003.

Ruiz, Ángel, *Historia y filosofía de la Matemática*. San José: Editorial Universidad Estatal a Distancia (EUNED), 2003.

Skovsmose, Ole. *Hacia una filosofía de la Educación Matemática Crítica*. Traducido por Paola Valero. Bogotá: Una empresa docente-Universidad de los Andes, 1999.

Skovsmose, Ole. “Escenarios de investigación”, en *Educación Matemática Crítica: una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas*, compilado por Paola Valero y Ole Skovsmose, 109-130. Bogotá: Universidad de los Andes / Aalborg University, 2012.

Spivak, Michael. *Calculus. Cálculo Infinitesimal*. Traducido por Bartolomé Fromtera Marques. México: Editorial Reverté, 1996.

Stake, Robert E. *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Ediciones Morata, 2007.

Stewart, James. *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas*. México, D. F.: Cengage Learning Editores, 2012.

Artículos de revistas

Aravena, María, Carlos Caamaño y Joaquín Giménez, “Modelos matemáticos a través de proyectos”, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 11, n.º 1, 2008: 49-92.

Aya Corredor, Orlando, Armando Echeverry Gaitán y Carmen Samper, “¿Es el cuadrado un rectángulo?”, *Sophia*, vol. 12, n.º 1, 2016: 139-158.

Bustamante Rojas, Álvaro “Educación, compromiso social y formación docente”, *Revista Iberoamericana de Educación*, vol. 4, n.º 374, 2006: 1-8.

Camarena, Patricia “La matemática en el contexto de las ciencias y la modelación”, *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, n.º 10, 2012: 183-193.

Cantoral, Ricardo, “Hacia una didáctica del cálculo basada en la cognición”, *Publicaciones centroamericanas*, n.º 7, 1993: 391-410.

Da Ponte, João Pedro, “Estudos de caso em educação matemática”, *Boletim de Educação Matemática*, vol. 19, n.º 25, 2006: 105-132.

De Loiola Araújo, Jussara, “Uma abordagem sócio-crítica da Modelagem Matemática: a perspectiva da educação matemática crítica”, *Alexandria. Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, vol. 2, n.º 2, 2009: 55-68.

González Urbaneja, Pedro Miguel, “Historia de la matemática: Integración cultural de las matemáticas, génesis de los conceptos y orientación de su enseñanza”, *Enseñanza de las ciencias*, vol. 9, n.º 3, 1991: 281-289.

Orey, Daniel Clark y Milton Rosa, “A dimensão crítica da modelagem matemática: ensinando para a eficiência sociocrítica”, *Horizontes*, vol. 25, n.º 2, 2007: 197-206.

Posada Balvín, Fabián A. y Jhony A. Villa Ochoa, “El razonamiento algebraico y la modelación matemática”, *Didáctica de las matemáticas*, vol. 2, n.º 2, 2006: 127-163.

Riscanevo Espitia, Lida, “La teoría de la práctica social del aprendizaje en la formación de profesores de matemáticas”, *Revista de Investigación, Desarrollo e Innovación*, vol. 7, n.º 1, 2016: 93-110.

Riscanevo Espitia, Lida y Yuri Carolina Niño Castillo, “La modelación matemática en escenarios exploratorio-investigativos para el aprendizaje del concepto de función”, *Voces y Realidades*, n.º 2, 2018: 65-80.

Riscanevo Espitia, Lida, Kelly Johana Cristancho Cruz y Claudia Patricia Fonseca Ochoa, “Influencias del contrato didáctico en el aprendizaje del concepto de función”, *Praxis & Saber*, vol. 2, n.º 3, 2011: 119-138.

Rosa, Milton, Frederico da Silva Reis y Daniel Clark Orey, “A modelagem matemática crítica nos cursos de formação de professores de matemática”, *Acta Scientiae*, vol. 14, n.º 2, 2012: 159-184.

Salett Biembengut, María y Nelson Hein, “Modelación matemática: estrategia para enseñar y aprender matemáticas”, *Educación Matemática*, vol. 11, n.º 1, 1999: 119-134.

Salett Biembengut, María y Nelson Hein, “Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática”, *Educación Matemática*, vol. 16, n.º 2, 2004: 105-125.

Salinas, Patricia y Juan Antonio Alanís, “Hacia un nuevo paradigma de la enseñanza del Cálculo dentro de una institución educativa”, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 12, n.º 3, 2009: 355-382.

Salinas, Patricia, Juan Antonio Alanís y Ricardo Pulido, “Cálculo de una variable. Reconstrucción para el aprendizaje y la enseñanza”, *Didac*, n.ºs 56-57, 2010-2011: 62-69.

Sastre Vásquez, Patricia, Graciela Rey y Carolina Boubée, “El concepto de función a través de la Historia”, *Unión-Revista iberoamericana de educación matemática*, n.º 16, 2008: 141-155.

Silva Alayón, Darwin J., “De lo real a lo formal en matemática”, *Integra Educativa*, vol. 3, n.º 2, 2010: 157-178.

Trigueros Gaisman, María, “El uso de la modelación en la enseñanza de las matemáticas”, *Innovación Educativa*, vol. 9, n.º 46, 2009: 75-87.

Tusón V., Amparo, “El análisis de la conversación: entre la estructura y el sentido”, *Estudios de sociolingüística*, vol. 3, n.º 1, 2002: 133-153.

Ugalde, William J., “Funciones, desarrollo histórico del concepto y actividades de enseñanza aprendizaje”, *Matemática, Educación e Internet*, vol. 14, n.º 1, 2014: 1-48.

Villa Ochoa, Jhony Alexander “La Modelación como Proceso en el Aula de Matemáticas: un marco de referencia y un ejemplo”, *TecnoLógicas*, n.º 19, 2007: 63-85.

Consultas de internet

Cantoral, Ricardo, “Enseñanza de la matemática en la educación superior”, *Sinéctica. Revista Electrónica de Educación*, n.º 19, 2001, <https://sinectica.iteso.mx/index.php/SINECTICA/article/view/359>. (Consultado el 20 de agosto de 2018)

Camargo, Leonor, “Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria”. Tesis de doctorado en Didáctica de la matemática, Universidad de Valencia, 2010. <http://funes.uniandes.edu.co/960/1/Camargo2010.pdf>. (Consultado el 27 de agosto de 2018)

Cárdenas Sierra, Yuliana Raquel y Diego Alejandro Muñoz Restrepo. “Educación Matemática Crítica y análisis didáctico: una propuesta de construcción de saberes matemáticos en contextos de conflicto social en la Institución Educativa Nuevo Horizonte de la ciudad de

Medellín”. Tesis de maestría en Educación Matemática, Universidad de Medellín, 2014.

González Burón, Paola, “Dificultades en el aprendizaje de las funciones en matemáticas”. Tesis de maestría en Formación del Profesorado de Educación Secundaria, Universidad de Cantabria, 2015. <https://repositorio.unican.es/xmlui/bitstream/handle/10902/6893/Gonz%C3%A1lezBurónPaula.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. (Consultado el 11 de noviembre de 2017)

Martínez Bonafé, Jaume, “Arqueología del concepto ‘compromiso social’ en el discurso pedagógico y de formación docente”, *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, vol. 3, n.º 1, 2001: 1-28. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=243787>. (Consultado el 16 de abril de 2018)

Monje, Carlos A., “Metodología de la investigación cuantitativa y cualitativa - Guía didáctica”, Neiva (Colombia);, Universidad Surcolombiana, 2011. <https://www.uv.mx/rmipe/files/2017/02/Guia-didactica-metodologia-de-la-investigacion.pdf>. (Consultado 17 de julio de 2018)

Villa Ochoa, Jhony A. y Héctor M. Ruiz Ramos, “Modelación en educación matemática: una mirada desde los lineamientos y estándares curriculares colombianos”, *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, n.º 27, 2009: 1-21. <http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/article/view/102>. (Consultado el 2 de junio de 2018)

CAPÍTULO 2. FACTORIZANDO CON REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS

Laura Ximena Casas Rodríguez

Nelsy Rocío González Gutiérrez

2.1 CONTEXTO DE LA INVESTIGACIÓN

Este escrito centra su interés en el estudio de uno de los tantos aspectos en los que se desarrolla actualmente la didáctica de la matemática, una ciencia relativamente nueva, en busca de exploraciones y soluciones a los problemas que se presentan en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en la escuela. En consecuencia, en el aprendizaje de las matemáticas se pueden evidenciar diversas dificultades. Desde este punto de vista, se relacionan algunas dificultades que pueden presentarse en los escolares pues,

(...) hay estudiantes que han construido conceptos, pero no saben ejecutar algoritmos; estudiantes que llevan a término un algoritmo, pero no saben qué conceptos están en la base dicha ejecución; estudiantes que han construido conceptos y saben ejecutar algoritmos, pero no saben resolver problemas; estudiantes que han construido conceptos, saben ejecutar algoritmos, saben resolver problemas, pero no saben comunicar aquello que han construido personalmente.¹

De esta manera, los estudios en educación matemática implican organizar actividades que involucren a todos los estudiantes que están en el aula de clase. Pero, hablando de dificultad, el docente puede llegar a enfrentar algunas, pues generar tareas que integren a todos los estudiantes comporta no pocas dificultades. Es así que la cons-

¹ Bruno D'Amore *et al.*, *La didáctica y la dificultad en matemática. Análisis de situaciones con falta de aprendizaje*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio, 2010.

tante reflexión de la práctica pedagógica forja pensamientos sobre los procesos que desarrolla el estudiante a lo largo de su vida escolar y también los obstáculos a los que debe enfrentarse, considerando que las dificultades son diferentes para cada persona, es decir, cada individuo tiene sus propias barreras.

Ahora bien, una de las tareas del docente es la búsqueda constante de estrategias encaminadas a superar las dificultades que se presentan. Desde esta perspectiva, es importante resaltar y hacer referencia al aprendizaje colaborativo como una forma de superar, en cierto modo, los obstáculos, pues en este se “comparte la idea de que los estudiantes trabajan juntos para aprender y son responsables del aprendizaje de sus compañeros tanto como del suyo propio. Todo esto trae consigo una renovación en los roles asociados a profesores y alumnos”².

En concordancia con lo anterior, surge esta investigación como producto del estudio en el programa de Maestría en Educación Matemática de la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia y desde la propia reflexión crítica y la participación activa en el grupo de investigación Somos Maestr@s, y, especialmente, en el semillero Resonantes, el cual tiene como principio general analizar los procesos de aprendizaje de sus integrantes cuando investigan colaborativamente en la enseñanza de las matemáticas. De esta manera, la vinculación al semillero genera espacios de socialización de avances investigativos de cada uno de sus miembros. Así mismo, brinda herramientas en busca de la mejora continua y el aprendizaje aún más significativo sobre la Educación Matemática.

2.2 CIMIENTOS TEÓRICOS Y METODOLÓGICOS DE LA INVESTIGACIÓN

A lo largo del escrito se describen aspectos importantes respecto a la teoría de representaciones semióticas propuesta por el filósofo y psicólogo francés Raymond Duval, quien ha centrado gran parte de

2 César Alberto Collazos, Luis Guerrero y Adriana Vergara, “Aprendizaje Colaborativo: un cambio en el rol del profesor”, en *Actas del Tercer Congreso de Educación Superior en Computación*, Punta Arenas, Chile, 2001. <http://users.dcc.uchile.cl/~luguerre/papers/CESC-01.pdf>

sus estudios e investigaciones en la indagación interdisciplinaria de Didáctica de la Matemática y Ciencias Cognitivas. Además, se abordan temas relacionados con el álgebra elemental, específicamente la factorización de expresiones algebraicas, dando a conocer aspectos descriptivos del problema de investigación y la mediación de los objetivos por tratar de disminuir las dificultades presentes en la educación media respecto al área de matemáticas, concretamente en temáticas de grado octavo relacionadas al álgebra elemental y la factorización de expresiones algebraicas.

Así mismo, se emprenden concepciones teóricas que se tienen en cuenta como base fundamental para el desarrollo de la investigación. Se presentan la teoría de representaciones semióticas, las concepciones y avance que ha presentado el álgebra elemental a través de la historia en Colombia y aspectos sobre la comunicación en el aula de matemáticas.

Desde el punto de vista metodológico, se tuvo como eje fundamental la teoría de representaciones semióticas y los procesos cognitivos de formación, tratamiento y conversión, teniendo presente la comunicación en la clase de matemáticas y procesos básicos de cálculos que realizan los estudiantes al enfrentarse a diversas situaciones de enseñanza. Se realizó el análisis de resultados y conclusiones desarrollando un estudio detallado de lo propuesto y construido por un grupo de estudiantes al efectuar la factorización y expansión de la diferencia de cuadrados perfectos, empleando diversos registros de representación semiótica. El objetivo de este estudio era identificar e implementar en el aula de clase diferentes representaciones semióticas presentes en la factorización de expresiones algebraicas, partiendo de la descripción por medio de registros de representación, determinando procesos que permitieran la asignación y validación de los registros semióticos y finalmente consolidando diferentes representaciones semióticas de la factorización del trinomio cuadrado perfecto y diferencia de cuadrados perfectos, analizando la congruencia que existe entre las representaciones y los aportes generados por los estudiantes. En relación con lo anterior, se destaca que el “investigador hace cuestiones abiertas, recaba datos expresados a través del lenguaje escrito, verbal y no verbal, así como visual, los cuales

describe y analiza y los convierte en temas que vincula, y reconoce sus tendencias personales”³.

En la investigación científica se habla de un método cualitativo cuando el proceso de indagación es flexible y se mueve entre las respuestas y el desarrollo de la teoría⁴. Así mismo, en un enfoque cualitativo se postula que la realidad se define a través de las interpretaciones de los participantes en la investigación respecto de sus propias realidades, empleando el desarrollo natural de los sucesos sin ninguna modificación, consolidando el propósito de reconstruir la realidad, tal como la observan los actores de la investigación. En particular, este método pretende describir, comprender e interpretar los fenómenos a través de las percepciones y significados producidos por las experiencias de los participantes.

El enfoque se basa en métodos de recolección de datos no estandarizados ni completamente predeterminados. No se efectúa una medición numérica, por lo cual el análisis no es estadístico. La recolección de los datos consiste en obtener las perspectivas y puntos de vista de los participantes (sus emociones, prioridades, experiencias, significados y otros aspectos subjetivos). También resultan de interés las interacciones entre individuos, grupos y colectividades.⁵

Desde esta perspectiva, la investigación se enmarca en el paradigma interpretativo ya que en este se destaca la comprensión y la búsqueda de significados. La realidad social en la que se desarrolla la investigación no puede ser únicamente observada, sino que debe generar una interpretación. De igual manera, el investigador está en constante interacción con el objeto investigado y el conocimiento se puede alcanzar a través de la comprensión⁶. El objeto de análisis es difuso, es cambiante, es difícil de aprender, entonces la relación que se debe en-

3 Hernández, Fernández y Baptista, *Metodología de la investigación*.

4 Ibíd.

5 Ibíd.

6 Piergiorgio Corbetta, *Metodología y técnicas de investigación social*. Madrid: McGraw-Hill, 2007.

tablar, sujeto-objeto, no debe ser distante, debe estar interrelacionada con el propósito continuo de buscar la manera de llegar al objeto.

Vale la pena mencionar que las “técnicas para recolectar datos, como la observación no estructurada, entrevistas abiertas, revisión de documentos, discusión en grupo, evaluación de experiencias personales, registro de historias de vida, e interacción e introspección con grupos o comunidades”⁷, son elementos destacados para la recolección de la información en la investigación de tipo cualitativo. Estas técnicas facilitan la comprensión de los datos, la perspectiva, los puntos de vista, y, en el caso específico de este trabajo, las representaciones semióticas descritas por los participantes. Con el propósito de recolectar la información pertinente para esta investigación se implementaron instrumentos como: observación directa, entrevista semiestructurada y secuencia didáctica contextualizada. Teniendo en cuenta las consideraciones éticas, inicialmente se dio a conocer el proyecto con directivos de la institución educativa, además se realizó esta actividad con los padres familia y representantes legales de los estudiantes del grado octavo y se procedió a la revisión y firma del consentimiento informado y de la autorización por parte de padres de familia o tutores legales.

Lo anterior, teniendo en cuenta que para el desarrollo de este estudio se hizo necesario contar con un grupo de estudiantes de grado octavo, con edades entre los doce y quince años, matriculados en la sede principal de la Institución Educativa Agropecuaria El Escobal del municipio de Ramiriquí, en el departamento de Boyacá. La institución educativa está ubicada en una zona rural, exactamente en la vereda El Escobal, a ocho kilómetros del casco urbano del municipio. La población de este lugar, en este caso los padres de familia de los estudiantes, se dedican exclusivamente a labores de ganadería y agricultura, con condiciones socioeconómicas insatisfechas, además de contar con un bajo nivel de escolaridad. Por otra parte, para esta investigación se elaboró un diseño metodológico que incluyera la teoría de representación semiótica, en especial los procesos cognitivos de tratamiento y conversión que los estudiantes construyen o deducen al realizar la factorización de expresiones algebraicas, así como la

7 Hernández, Fernández y Baptista, *Metodología de la investigación*.

relación que existe entre las bases teóricas y lo que el estudiante quiere dar a conocer.

La figura 6 describe el diseño empleado en la investigación; se parte de la temática que se desarrolla, correspondiente a la factorización de expresiones algebraicas relacionada con la teoría de representaciones semióticas. Desde esta relación se diseña la secuencia didáctica y esta, a su vez, está conformada por cuatro situaciones didácticas. A partir de la implementación de las situaciones didácticas, se pretende enriquecer los procesos de concepción, experimentación, formulación y validación e institucionalización del conocimiento y, finalmente, evaluar los procesos cognitivos de tratamiento y conversión que realizan los estudiantes.

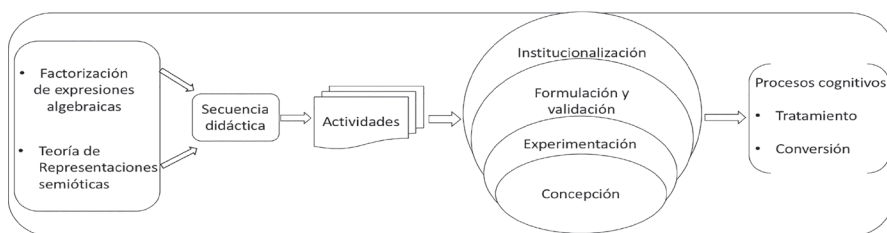


Figura 6. Diseño metodológico. Fuente: elaboración propia.

Factorizando con representaciones semióticas

El trabajo de investigación se apoya en el estudio de representaciones semióticas presentes en la enseñanza y aprendizaje de un objeto matemático; y dado que “las representaciones semióticas incluido cualquier lenguaje, aparecen como herramientas para producir conocimiento”⁸, aquí esta teoría será fundamental. Así pues, las representaciones juegan un papel fundamental en el proceso de comunicación y en la construcción de objetos matemáticos⁹.

8 Raymond Duval y Adalira Sáenz-Ludlow, *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas*. Bogotá: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2016.

9 Ibíd.

Las representaciones se han utilizado a lo largo de la historia en tres ocasiones distintas, la primera por parte de Piaget hacia los años 1924-1926, empleando las representaciones mentales como representaciones del mundo de los niños. Luego, entre 1955 y 1960, aparece la idea de las representaciones internas, que buscan describir información mediante un sistema de transformación, es decir, codificando la información, un modelo promovido, al parecer, por el psicólogo experimental inglés Donald Broadbent. La tercera ocasión ocurrió hacia 1985, cuando aparecen las representaciones semióticas en el marco de la didáctica de la matemática y de los problemas de aprendizaje de esta rama, empleando especialmente un sistema particular de signos que se pueden ver como representaciones equivalentes¹⁰.

En la enseñanza y el aprendizaje de conceptos matemáticos se evidencia una gama de dificultades a las que el estudiante se enfrenta en el proceso de escolarización¹¹. De esta manera, se pone de manifiesto que el proceso de aprendizaje de las matemáticas contiene cierto nivel de dificultad para algunos estudiantes.

Los procesos de adquisición del conocimiento matemático son tan complejos que parece ser necesario tener diferentes enfoques. Los más predominantes, y a veces opuestos, son el enfoque epistemológico y el educativo. Pero ellos tienen en común el uso de la noción de representación para caracterizar el tipo de fenómenos que ocurren.¹²

De esta manera, “desde la perspectiva de las ciencias cognitivas las representaciones son consideradas como cualquier noción, signo o conjunto de símbolos que significan algo del mundo exterior o de nuestro mundo interior”¹³. En otras palabras, las representaciones pueden ser estimadas como cualquier figura que aparezca en el cerebro y

10 Raymond Duval, *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali: Universidad del Valle, 1999.

11 John Mason *et al.*, *Rutas hacia el Álgebra. Raíces del Álgebra*, trad. Cecilia Agudelo V. Tunja: UPTC, 1999.

12 Duval y Sáenz-Ludlow, *Comprensión y aprendizaje*.

13 Oscar E. Tamayo, “Representaciones semióticas y evolución conceptual en la enseñanza de las ciencias y las matemáticas”, *Revista Educación y Pedagogía*, vol. 18, n.º 45, 2006: 39 [cursivas del original].

su proyección plasmada en el diario vivir. Estos conjuntos de signos o símbolos pueden ser internos o externos; los diagramas, las figuras, los dibujos son representaciones externas —conocidas también como representaciones semióticas¹⁴— con propósitos comunicativos y se emplean consciente o inconscientemente en la cotidianidad.

Ahora bien, es importante destacar que las representaciones semióticas juegan un papel importante en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Las representaciones permiten el acceso a los objetos matemáticos y esto se fundamenta en que la actividad matemática se realiza necesariamente en un contexto de representación¹⁵. De ahí que se resalte la importancia de emplear las representaciones semióticas con el objetivo de lograr un aprendizaje con mayor significado para los estudiantes.

Así mismo, en el campo del aprendizaje de las matemáticas se involucra el análisis de las actividades cognitivas. Las representaciones semióticas son un sistema particular de signos que son necesarios para conceptualizar procesos cognitivos, los cuales, además, requieren como actividad la utilización de sistemas de representación diferentes al lenguaje natural, ya sean esquemas, figuras geométricas, gráficos cartesianos o tablas, considerando que estos sistemas de representación son diferentes entre sí y cada uno plantea preguntas específicas sobre el aprendizaje¹⁶.

En el desarrollo de la actividad cognitiva del estudiante se emplean distintos registros de representación, aparte del lenguaje natural y los símbolos. Las transformaciones del registro de representación que se realizan son el tratamiento y la conversión. Así pues, se hace referencia al tratamiento como “la transformación de una representación (inicial) en otra representación terminal, respecto a una cuestión, un problema o una necesidad”¹⁷. Es decir, al hablar de tratamiento, la transformación produce otra representación dentro del mismo registro. Y la conversión es “la transformación de la representación de

14 Duval, *Semiosis y pensamiento humano*.

15 *Ibíd.*

16 Duval y Sáenz-Ludlow, *Comprensión y aprendizaje*.

17 Duval, *Semiosis y pensamiento humano*.

un objeto, de una situación o de una información dada de un registro, es una representación del mismo objeto o de la misma información en otro registro”¹⁸. En efecto, la conversión es el cambio de registro sin cambiar el objeto.

Por otra parte, respecto al desarrollo conceptual del álgebra, una de las características que se destaca consiste en que es un medio ideal a través del cual se puede ver y expresar declaraciones generales¹⁹. Desde esta perspectiva, las siguientes líneas resaltan la importancia y trascendencia que ha tenido el álgebra a través del tiempo.

El álgebra es, en esencia, la doctrina de las operaciones matemáticas analizadas desde un punto de vista abstracto y genérico, independiente de los números u objetos concretos. A lo largo de la historia de la humanidad esta ciencia ha ido evolucionando, cada civilización y cada cultura con sus características propias han dejado un legado testimonial escrito del que en la actualidad somos herederos.²⁰

Ahora bien, es necesario hacer un recuento de la historia de las matemáticas en Colombia, partiendo de que “Colombia no ha sido un actor importante en el marco de las matemáticas en el mundo, pero sí es un país interesado en aprendizaje de esta ciencia”²¹. De esta manera, comenzará un relato de la matemática en Colombia a partir de la colonización y la colonia.

Los diferentes grupos indígenas que habitaban el territorio colombiano podían contar con su propio sistema de numeración, sin duda muy diferente del que utilizamos hoy. Los sacerdotes que formaron parte de las expediciones de conquista y luego contribuyeron a configurar la etapa de la Colonia fundaron escuelas en las cuales comenzaron

18 Duval y Sáenz-Ludlow, *Comprensión y aprendizaje*.

19 Duval, *Semiosis y pensamiento humano*.

20 Ana Lorente, “Historia del álgebra y de sus textos”, s. f. https://s3.amazonaws.com/academia.edu.documents/38983595/Historia_del_algebra_y_de_sus_textos.pdf (Consultado en junio de 2018).

21 Gabriel Poveda R., *Historia de las matemáticas en Colombia*. Medellín: Ediciones Universidad Autónoma Latinoamericana, 2010.

a difundir lo que conocemos como números naturales, así como las cuatro operaciones elementales, unidades de medida, ángulos, rectas y otros²². El atraso respecto a otras culturas era amplio, por ejemplo, con los mayas, quienes llegaron a construir un sistema de numeración propio e incluso a crear un calendario.

La época de la Colonia coincidió con el periodo conocido en la Europa Occidental como Renacimiento, durante el cual se fortalecieron las matemáticas, creando bases fuertes para avances posteriores; de modo que “se estaba recopilando libros de geometría de Euclides, los de aritmética de Diofanto y Pitágoras y los de álgebra de los árabes”²³, con el fin de buscar la adaptación de estos a Colombia. Los aportes y aprendizajes de esta época fueron muy vagos, ya que no se contaba con suficientes bases teóricas para la enseñanza de esta área, pues aún se estaban consolidando.

Asimismo, durante el siglo XIX, denominado la edad de oro de las matemáticas, existían grupos de matemáticos más o menos organizados y fue en las universidades europeas donde se inició un trabajo con textos de matemáticas. Uno de los integrantes de estos grupos fue el matemático francés Sylvestre François Lacroix, autor del libro *Tratado Elemental de Aritmética*, en el cual se tratan temas enunciados como: números naturales, operaciones básicas entre números naturales y las propiedades, números quebrados y las operaciones básicas, números decimales, factorización de un número natural, entre otros²⁴, muy importante en el caso colombiano dado que fue implementado para la enseñanza de las matemáticas en secundaria y universidades hasta los primeros años del siglo XX.

Otro aporte de estas organizaciones y de interés para esta investigación es el libro titulado *Curso completo elemental de Matemáticas Puras. Álgebra*, del mismo Lacroix, donde se describen la aritmética y el álgebra, operaciones entre expresiones algebraicas y enuncia el álgebra como “polinomios algebraicos; factorización; algoritmos

²² Ibíd.

²³ Ibíd.

²⁴ Ibíd.

algebraicos; función lineal; ecuaciones algebraicas (...)”²⁵. Desde esta perspectiva, la factorización de expresiones algebraicas se introduce en la escuela hace bastante tiempo, pero no da el verdadero significado y relevancia que merece.

En la segunda mitad del siglo XIX se fundan las primeras universidades en Colombia, como la Universidad Nacional en Bogotá y la Escuela de Minas en Medellín. En estas instituciones los profesores fueron hombres y debían ser ingenieros, pues la educación se fundamentaba en esa rama, que era llamada “la reina de las ciencias”²⁶. De lo anterior, vale la pena resaltar que la matemática, desde sus inicios en nuestro país, fue considerada como una ciencia con cierto grado de complejidad, que solo podía ser orientada por personas preparadas. Para inicios del siglo XX la matemática en Colombia tiene mayor relevancia y es aplicada en problemas de la vida diaria, además consolida bases aun más sólidas que en los siglos anteriores y se da inicio a la implementación del álgebra elemental en el aula de clase.

La escuela apropia y desarrolla lo referido a la aritmética para completar la triada “leer, escribir y contar”. De acuerdo con esto, conocer la aritmética consiste en dominar los algoritmos de las cuatro operaciones y saber aplicarlos para resolver problemas cotidianos de la vida social.²⁷

El hecho de introducir el desarrollo de las matemáticas en la escuela primaria hizo que, aparte de realizar las cuatro operaciones básicas de la aritmética, los estudiantes tenían que desarrollar un acercamiento al razonamiento y a la apropiación de conocimientos propios del área. En concordancia con lo anterior, es importante mencionar que “se hace visible la configuración de un saber escolar que dista mucho de los intereses de la disciplina de referencia, a saber, la matemática”²⁸. De este modo, la enseñanza de la aritmética termina por convertirse en una herramienta para configurar o reafirmar los diversos modos

25 Ibíd.

26 Ibíd.

27 Rafael Ríos, “Historia de la enseñanza en Colombia: entre saberes y disciplinas escolares”, *Pedagogía y Saberes*, n.º 42, 2015.

28 Ibíd.

de constituirse como sujeto en la sociedad, naturalizada por medio del manual.

A finales del siglo XX, el Ministerio de Educación Nacional (MEN)²⁹ emite una serie de lineamientos que indican que la Educación Matemática en Colombia ha pretendido hacer parte de la transformación de la educación, cuyo principal objetivo es:

Responder a nuevas demandas globales y nacionales, como las relacionadas con una educación para todos, la atención a la diversidad y a la interculturalidad y la formación de ciudadanos y ciudadanas con las competencias necesarias para el ejercicio de sus derechos y deberes democráticos³⁰.

Dichos lineamientos son una herramienta que pretenden lograr el desarrollo de competencias matemáticas en los estudiantes. En el documento se plantean cinco procesos generales: modelación, comunicación, formulación, resolución y razonamiento de problemas. Además, resalta cinco tipos de pensamiento matemático: el numérico, el espacial, el métrico o de medida, el aleatorio o probabilístico y el variacional, cada uno de estos se encarga de una rama de la matemática.

Se puede ver una clara relación con los cinco tipos de pensamiento matemático enunciados en los Lineamientos Curriculares: en la aritmética, el pensamiento numérico; en la geometría, el pensamiento espacial y el métrico; en el álgebra y el cálculo, el pensamiento métrico y el variacional, y en la probabilidad y estadística, el pensamiento aleatorio.³¹

En la presente investigación se hace mayor énfasis en los pensamientos variacional y métrico, ya que el estudio está encaminado en la factorización de expresiones algebraicas, empleando la representación de registros semióticos. Lo anterior está inmerso en dicha

29 Ministerio de Educación Nacional (MEN), “Lineamientos Curriculares - Matemáticas”, Bogotá, 1998.

30 *Ibíd.*

31 *Ibíd.*

corriente matemática y se justifica con este tipo de pensamiento, ya que:

[...] tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos.³²

De la misma manera, a inicios del siglo XXI el MEN da a conocer una estrategia planteada como un apoyo y complemento para la construcción y actualización de propuestas curriculares, guardando coherencia con los Estándares Básicos de Competencias y los denominados Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA). Así mismo presenta el objetivo de las mallas de aprendizaje, como herramientas que permiten orientar a los docentes sobre qué deben aprender los estudiantes en cada grado, y cómo pueden desarrollar actividades para este fin. Por ejemplo, para el grado octavo, teniendo en cuenta los DBA, “los estudiantes deben proponer, comparar y usar procedimientos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas en diversas situaciones o contextos”³³, además de realizar “toma de decisiones informadas en exploraciones numéricas, algebraicas o gráficas de los modelos matemáticos usados”.³⁴

Subrayan que el álgebra no puede considerarse como un proceso aparte o separado de los conocimientos presentes en la aritmética o la geometría, sino que involucra los pensamientos numérico y métrico respectivamente, concluyendo en una formación conjunta. En cuanto a la parte formal del álgebra, es indiscutible el lugar que ocupa la construcción del pensamiento algebraico a lo largo de un proceso paralelo y continuo dentro de un trabajo de actividades aritméticas y geométricas. De lo anterior sobresale que los procesos de la aritmética y la geometría van estrechamente ligados y entrelazados desde

32 Ibid.

33 Ministerio de Educación Nacional (MEN), “Derechos Básicos de Aprendizaje”, Bogotá, 2010.

34 Ibid.

el inicio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática en la escuela³⁵.

Por otro lado, en cuanto a los temas de comunicación, vale recordar que, por generaciones, la clase de matemáticas ha sido estigmatizada como difícil y aburridora, razón por la cual el profesor tiene la tarea de cambiar ese paradigma³⁶. Por su parte, hacen referencia a que “convertir la clase de matemáticas en algo significativo es, sin lugar a dudas, uno de los grandes desafíos de los profesores y de los investigadores en educación matemática”³⁷. De ahí que la interacción con los estudiantes es parte fundamental del proceso comunicativo e investigativo que se debe generar en el aula de clase.

De modo que la comunicación es indispensable para entablar lazos de afinidad con las personas y también en la orientación de un conocimiento matemático. Ahora bien, se deben tener en cuenta las prácticas culturales, el contexto, y en sí la actividad que realiza la comunidad en general para captar lo que se quiere transmitir. “La influencia del contexto está relacionada con el ambiente de trabajo escolar y social, la organización y el funcionamiento de la escuela, los recursos existentes y las expectativas de los padres y la comunidad”³⁸.

La comunicación es considerada como un proceso de interacción social en la que siempre están presentes los consensos, el diálogo o los debates; según Ponte *et al.*, citados por Suárez, Galindo y Jiménez, la comunicación se refiere a la interacción entre los diversos sujetos que hay en una clase, empleando un lenguaje propio, que es una mezcla del lenguaje cotidiano y del matemático³⁹.

Además es importante tener en cuenta que una comunicación deficiente puede reducir la clase a la transcripción de un lenguaje simbólico carente de sentido, con lo cual se impide a los estudiantes desarrollar su pensamiento matemático a través de los procesos de

35 Mason *et al.*, *Rutas hacia el Álgebra*.

36 *Ibíd.*

37 Nury Suárez, Sandra Galindo y Alfonso Jiménez, “La comunicación: eje en la clase de matemáticas”, *Praxis & Saber*, vol. 1, n.º 2, 2010.

38 *Ibíd.*

39 *Ibíd.*

particularizar, generalizar, conjeturar y convencer⁴⁰. Es fundamental, entonces, que dentro y fuera del aula de clase exista una buena interacción, pues el comunicar de manera adecuada se convierte en el mecanismo propicio para la negociación de significados. Desde esta perspectiva, cabe mencionar que:

Un buen comunicador ha de dominar los tres tipos de lenguaje (visual, auditivo y cinestésico) para poder comunicarse con personas diferentes. Por ejemplo, para mantener la atención de una platea, es necesario gesticular, variar el tono de voz, moverse por la sala, aproximarse a las personas, utilizar recursos audiovisuales, todo lo que esté al alcance de la mano para comunicarse sin dificultades con los tres tipos de persona.⁴¹

De ahí que, cuando hay interacción comunicativa y existen buenos comunicadores, “la negociación de significados aparece de manera natural, la cual se refiere al modo en que los alumnos y el profesor exponen unos a otros su forma de entender los conceptos y los procesos matemáticos, los perfeccionan y los ajustan al conocimiento matemático”⁴². Así mismo, cuando se presenta un buen ejercicio de comunicación es posible fortalecer la argumentación, ello sustentado en que “es preciso reflexionar sobre cómo contribuyen las estrategias de comunicación centradas en el trabajo en grupo y la heurística del solucionar-escucha en el desarrollo de la argumentación en clase de matemáticas”⁴³.

2.3 ¿QUÉ OCURRIÓ EN EL AULA DE CLASE?

Al realizar el análisis de la práctica docente en el aula de clase se logró detectar que en ocasiones la clase se tornaba monótona y por

40 Mason *et al.*, *Rutas hacia el Álgebra*.

41 Lair Ribeiro, *La comunicación eficaz: Transforme su vida personal y profesional manejando su capacidad de comunicación*. Barcelona: Ediciones Urano, 1999 [cita tomada de un resumen preparado por Nery Parada. http://www.ucipfg.com/Repositorio/MIA/MIA-06/Unidad3/Comunicacio_uen_eficaz.pdf. (Consultado en junio de 2018)].

42 Suárez, Galindo y Jiménez, “La comunicación: eje”.

43 Alfonso Jiménez y Luz Miryam Pineda, “Comunicación y argumentación en clase de matemáticas”, *Educación y Ciencia*, n.º 16, 2013.

lo tanto algo aburrida, de ahí que la reflexión crítica de esta actividad generó ideas y perspectivas de cambio, que muy seguramente no se lograrán de manera inmediata pero sí será una transformación paulatina en busca de la mejora continua. Es en esta reflexión donde se llega a concluir que los instrumentos que se emplearían tendrían que brindar la oportunidad de conocer a los estudiantes, de realizar la caracterización de la propia práctica docente, y, finalmente, de realizar un cambio metodológico de la clase. De esta manera, los instrumentos empleados para realizar la recolección de la información fueron, en primer lugar, una entrevista semiestructurada que permitió conocer la percepción que los estudiantes tenían de la matemática y del álgebra como tal. Además, fue posible determinar y caracterizar el contexto en el que ellos vivían, así como la identificación de rasgos y distintivos de los padres de familia de estos estudiantes: modos de vida, ocupaciones y grado de escolaridad.

En segundo lugar se llevó a cabo una observación de clase realizada por un tercero, en este caso la rectora de la Institución Educativa Agropecuaria El Escobal, lugar donde se realizó la investigación, sitio en el cual la investigadora principal se desempeñaba como docente del área de matemáticas. Se logró evidenciar la metodología de clase, las actitudes y comportamientos de los estudiantes, así como la forma de participación y ejecución de la clase.

Finalmente se procedió a diseñar e implementar las secuencias didácticas efectuadas con la finalidad de orientar la factorización y expansión algebraica del trinomio cuadrado perfecto y la diferencia de cuadrados perfectos en estudiantes de grado octavo. Utilizando diferentes formas de representación se diseñó la secuencia didáctica “Dando pasos”, dividida en cuatro situaciones de enseñanza: Situación 1. “En pie, haciendo solitos”; Situación 2. “Vamos de la mano”; Situación 3. “Preparando el camino”, y Situación 4. “A caminar”. Cada situación fue elaborada haciendo uso de circunstancias contextualizadas.

A continuación se describen algunos apartes que se generaron luego de realizar la entrevista a cinco estudiantes del grado octavo de la Institución Educativa utilizada en la investigación. Al realizar un análisis de las grabaciones de audio se logró evidenciar el contexto

en el que están inmersos los estudiantes y a la vez se pudo determinar su percepción frente a las matemáticas en general, y al álgebra en particular.

Respecto al contexto en el que viven los estudiantes, habitan en la zona rural de los municipios de Ramiriquí y Jenesano. Cuando no se presta el servicio de ruta escolar deben caminar largos trayectos para llegar al colegio, y al respecto uno de ellos manifiesta: “Me demoro media hora en ruta y como dos horas a pie” (estudiante E12)⁴⁴. En relación con las familias, los padres y madres de estos estudiantes cuentan con un bajo nivel de escolaridad, no superando el grado quinto de primaria: el estudiante E12 afirmó: “Mi papá estudió hasta como tercero y mi mamá como hasta segundo”; el estudiante E21: “Mi mamá estudió hasta quinto”⁴⁵; y el estudiante E11: “Mi papá estudió hasta quinto y mi mamá estudió hasta cuarto”⁴⁶.

En cuanto al trabajo desempeñado por los padres, las labores diarias giran en torno a actividades del campo, ya sea en sus propios cultivos o laborando en otros: “Mi papá se la pasa *jornaliando* donde salga” (estudiante E12) y el estudiante E13: “Mi mamá trabaja cogiendo uchuva”⁴⁷. Además, están dedicados a las labores propias del hogar, principalmente las madres de familia, como lo señala el estudiante E11: “Mi papá trabaja en el campo, es agricultor, y mi mamá es ama de casa”.

Los estudiantes manifestaron que luego de llegar del colegio, y en compañía de los hermanos, deben ayudar con los quehaceres de la casa, ya sea en la agricultura o en el pastoreo de semovientes, por lo que no les queda mucho tiempo para el desarrollo de las tareas asignadas en las clases.

44 E12 (estudiante de grado octavo, Institución Educativa Agropecuaria El Escobal), entrevista por Laura Ximena Casas, 15 de marzo de 2018.

45 E21 (estudiante de grado octavo, Institución Educativa Agropecuaria El Escobal), entrevista por Laura Ximena Casas, 15 de marzo de 2018.

46 E11 (estudiante de grado octavo, Institución Educativa Agropecuaria El Escobal), entrevista por Laura Ximena Casas, 15 de marzo de 2018.

47 E13 (estudiante de grado octavo, Institución Educativa Agropecuaria El Escobal), entrevista por Laura Ximena Casas, 15 de marzo de 2018.

Por otra parte, respecto a la percepción que existe de las matemáticas, se evidenció que los estudiantes las consideran como un área fundamental; el estudiante E13 señala: “Al emplear las matemáticas las cosas se hacen más prácticas y siempre las tenemos que utilizar”, y el estudiante E11: “Es una forma de aprendizaje, para poder desarrollar la mente”, aunque a veces las clases se tornen aburridas y difíciles de comprender, perspectiva desde la que se resalta lo que el estudiante E20 puso de manifiesto: “A veces uno no entiende lo que enseñan en matemáticas y se vuelven aburridas”⁴⁸. Con respecto a lo anterior, se preguntó a los estudiantes sobre cómo les gustaría que fueran las clases de matemáticas, a lo que respondieron: “Explicándonos de diferentes maneras” (estudiante E20); “Que sean más dinámicas” (estudiante E11); “Hacer lo que hagamos en clase, pero no dejar tarea” (estudiante E13); “Así como las hacen ahorita. Nos explican bien y todo” (estudiante E21) y, finalmente, el estudiante E12 afirmó que le gustaba cómo se orientaban, “así, normal”.

Además, al indagar sobre la posibilidad de la existencia de matemáticas sin números, ninguno de los estudiantes las conciben de esa manera, argumentando que “las matemáticas se tratan de números” (estudiante E11); “La matemática es parte de los números” (estudiante E21); “La matemática sin números no sería matemática” (estudiante E12); “No se podrían hacer operaciones” (estudiante E20); “Todo tiene un valor” (estudiante E13).

Por otra parte, con referencia al álgebra, la mayoría de los estudiantes coincidió en no tener información sobre esta rama de las matemáticas. Solo dos estudiantes dieron respuesta a la pregunta ¿qué ha escuchado del álgebra?: “Que es muy difícil”, y que se emplean “como de letras, como relación con el abecedario” (estudiante E13); el estudiante E21 responde de una manera muy propia, asegurado que “es un libro”.

Finalmente, los estudiantes E11 y E12 manifestaron el agrado y el valor de asistir al colegio, destacando la importancia del estudio para “ser profesional y salir adelante”, así como “ser alguien de bien en la

⁴⁸ E20 (estudiante de grado octavo, Institución Educativa Agropecuaria El Escobal), entrevista por Laura Ximena Casas, 15 de marzo de 2018.

vida” y E11 agregó: “Lograr lo que nuestros padres no pudieron hacer”. De esta manera se puede concluir, con lo enunciado por Duval, que los estudios cognitivos juegan un papel importante de acuerdo, por un lado, con las variables intrínsecas, que son relativas al entorno y de gran interés para la realización de trabajos didácticos y de las ciencias de la educación, y, por el otro, con las variables relativas, en las que se indaga a partir de condiciones sociales y culturales de los alumnos⁴⁹.

Respecto a la caracterización propia de la práctica docente realizada por un tercero, la rectora de la Institución Educativa destacó en su informe de observación dos momentos en los que dividió la sesión y llamó: ambiente de aula y didáctica de clase, respectivamente. En relación con el ambiente de aula, hizo referencia a todo lo relacionado con actitudes que se presentan en el salón de clase por parte de los estudiantes y la docente: además de resaltar la importancia del saludo y la retroalimentación de conceptos previos a la clase, así como el trato equitativo a los estudiantes y la comunicación directa con los estudiantes, dirigiéndose a ellos por su nombre, destaca también la participación activa por parte de todos los estudiantes: “está pendiente de involucrar a los estudiantes que no están participando”, y finalmente el trato respetuoso de ambas partes.

Respecto a la didáctica de la clase, realizó una caracterización global de los aspectos que consideró importantes en el desarrollo de la sesión. Resaltó la importancia de la pregunta como tal, “hace preguntas para que los estudiantes reflexionen y afiancen sus conocimientos”, además que “hace preguntas en diferentes contextos a los estudiantes para verificar lo orientado”. Así mismo, menciona que “las actividades planteadas para la clase son pertinentes” y que “efectúa retroalimentación inmediata sobre las respuestas dadas por los estudiantes”, de igual manera, “revisa el trabajo que está desarrollando cada uno de los estudiantes” y finalmente se “establecen tiempos pertinentes para el desarrollo de las actividades”.

49 Duval, *Semiosis y pensamiento humano*.

Lo que sigue hace referencia a los resultados obtenidos tras la implementación de la secuencia “Dando pasos”, diseñada para orientar y realizar la factorización de la diferencia de cuadrados perfectos.

2.3.1 Situación 1. “En pie, haciendo solitos”

Se pretendía que, por medio de la visualización geométrica, el estudiante pudiese determinar y asignar las expresiones algebraicas representadas por cada parte de la figura y consolidar una sola expresión. Estos son algunos de los resultados:

Ítem 1. En la siguiente figura se puede observar el plano de una finca destinada al cultivo y en la misma finca se ha asignado un sector para la construcción de una vivienda.



Figura 7. Representación del plano de una finca

El sector destinado para la construcción de la casa, tiene un área que equivale a la expresión y^2 .

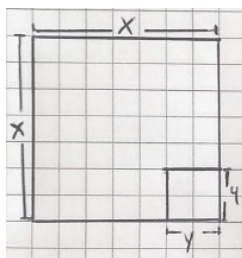


Figura 8. Representación área destinada a la construcción de una vivienda

De acuerdo con la anterior información responda las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área de la primera figura?
- ¿Cómo se puede expresar el área de la finca destinada al cultivo?

Respecto al primer cuestionamiento se pudo determinar lo siguiente:

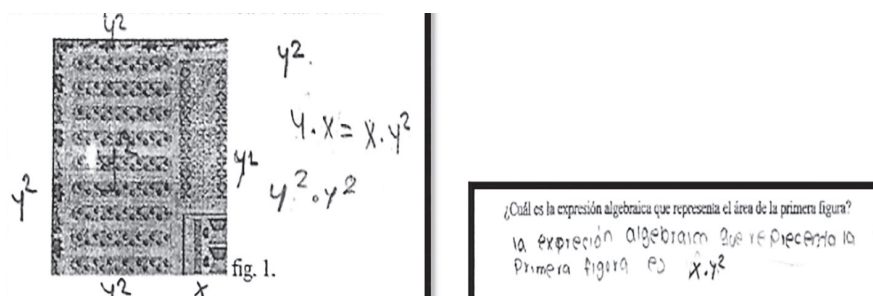


Figura 9. Conversión al registro algebraico a partir del registro gráfico realizado por E8

El estudiante E8 realiza la asignación de valores a la representación geométrica, pero se evidencia que en este caso no cumple con los criterios de congruencia con el registro de salida; de la misma manera, el tratamiento que realiza en la representación algebraica es incorrecto y las operaciones que realiza son erróneas⁵⁰.



Figura 10. Conversión al registro algebraico a partir del registro gráfico realizado por E11

50 Ibid.

El estudiante realiza una serie de divisiones respecto a la figura original y asigna valores a la representación.

Al realizar la conversión está presente la correspondencia semántica respecto al registro de salida, pero al realizar el tratamiento interno de la representación algebraica no logra consolidar la respuesta correcta.

El estudiante E11 inserta la expresión $-y^2$, x^2 y *concluye* xy^2 , evidenciando que no existe congruencia y además los cálculos no son adecuados. El estudiante realiza la conversión pero no logra concretar el tratamiento interno en el registro algebraico.

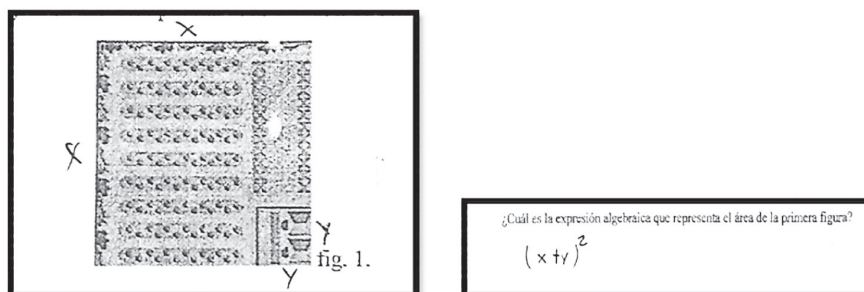


Figura 11. Conversión al registro algebraico a partir del registro gráfico realizado por E17.

El estudiante E17 realiza la asignación de valores a la representación gráfica, asume que es similar a las actividades realizadas en la factorización y expansión del trinomio cuadrado perfecto.

Respecto a la asignación que realiza y el resultado de la expresión que representa el área del terreno, existe coherencia semántica, univocidad en el registro terminal e igual orden de aprehensión, por lo que la conversión es congruente.

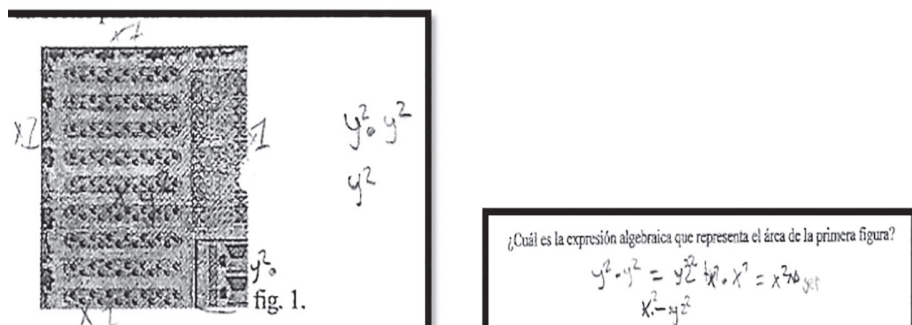


Figura 12. Conversión al registro algebraico a partir del registro gráfico realizado por E18

La asignación que realiza el estudiante E18 es coherente, determina el valor correspondiente a la representación del área en cada figura que compone el registro, en el interior de la figura coloca la que sería la expresión algebraica que representa el área xy^2 . Pero al remitirnos a la solución que realiza se evidencia falta de claridad para realizar las operaciones dentro de la representación, por lo que el tratamiento y la conversión son incorrectos.

A nivel general, los estudiantes no logran consolidar una respuesta acertada. Se destaca la asignación de valores a la representación geométrica dada, pero no tienen presentes las operaciones básicas entre expresiones algebraicas y carecen de conceptos elementales de geometría.

La conversión sigue siendo el proceso más difícil de realizar por parte de los estudiantes, las representaciones mentales generadas no consiguen consolidar registros de representación coherentes con el registro de partida⁵¹.

Ítem 2. Las respuestas que se obtuvieron a la segunda pregunta son las siguientes:

51 Ibid.

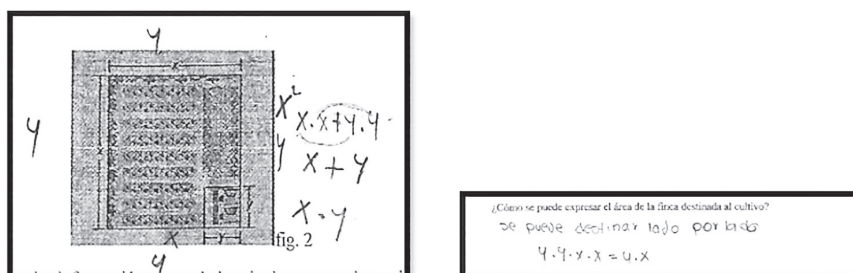


Figura 13. Conversión al registro algebraico a partir del gráfico realizado por E8

El estudiante E8 se remite a la representación gráfica, asignando nuevos valores al registro sin fijarse siquiera en los existentes. Al realizar el tratamiento dentro del registro algebraico se encuentra con dos productos y una adición, procediendo a realizar cálculos no adecuados, y existe *no congruencia* entre la representación de partida y la de llegada. El estudiante considera que la parte destinada al cultivo puede ser lado por lado, estableciendo errores en la paráfrasis.

La mayoría de los estudiantes no logró concretar la representación algebraica y, desde esta perspectiva, se considera que existe un contrato didáctico, pues emplearon la mayor parte de relaciones, operaciones y dinámicas que se habían realizado en la secuencia para factorizar y expandir el trinomio cuadrado perfecto.

La producción de nuevos registros de representación fue escasa; los estudiantes no lograron realizar los procesos cognitivos de tratamiento y conversión, por lo cual las tareas de producción y comprensión tampoco se desarrollaron plenamente. Se destaca la asignación de valores a las representaciones, los estudiantes trataron de plasmar las imágenes mentales en la representación gráfica, pero con un cierto grado de dificultad.

2.3.2 Situación 2. “Vamos de la mano”

En esta parte de la secuencia de enseñanza se buscaba que el estudiante realizara el proceso cognitivo de conversión del registro del

lenguaje natural a partir del registro gráfico o geométrico. A continuación se muestran algunos hallazgos en esta situación:

- A partir de las siguientes figuras responda los cuestionamientos

Figura 14.
Adaptación
registro
geométrico 1

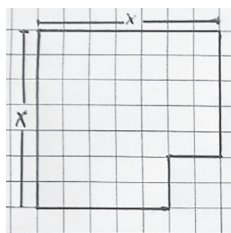


Fig. 1

Figura 15.
Adaptación
registro
geométrico 2

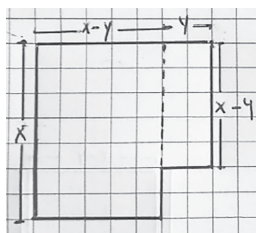


Fig. 2

Figura 16.
Adaptación
registro
geométrico 3

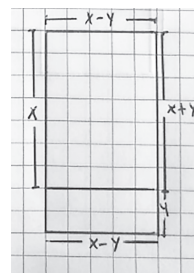


Fig. 3

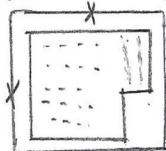
Fuente: Imágenes adaptadas de Applica 8, Editorial SM.

- Describa lo que observa en la Figura 1

¿Qué observa en la figura 1?

En la figura N° 1, se observa que a un cuadrado perfecto disminuyo un cuadrado perfecto mas pequeño.

¿Qué observa en la figura 1?



en las figuras observo que les hace falta un cuadrado de menos ya sea de la sinca o ya sea de cultivo. menos la ultima.

Figura 17. Conversión al registro de lenguaje natural a partir del registro gráfico realizado por E13 y E6

Los estudiantes coinciden en la descripción que realizan, señalando que al cuadrado grande le quitaron un cuadrado pequeño. Las unidades significantes que presenta la representación de partida no se mantienen en la movilización de registros. La correspondencia semántica al realizar la “traducción” presenta *no congruencia*, hace falta describir con más detalle las características de la figura; respecto a la univocidad semántica terminal, a las unidades significantes no les corresponde una única en el registro de llegada. En conclusión, los estudiantes realizan una expansión informacional sin lograr una adecuada paráfrasis, se resalta la descripción gráfica que realizan y el esfuerzo por describir la situación.

- ¿Qué figuras geométricas puede observar en las figuras?

¿Qué figuras geométricas se pueden observar en las figuras?
 Cuadrados, Rectángulos, que se forman al quitarle un pedazo al
 cuadrado de la fig. 1^a o de la figura 2.
 Es decir son similares el terreno es el mismo.

¿Qué figuras geométricas se pueden observar en las figuras?
 se pueden observar rectángulos y un
 cuadrado que le quitaron otro cuadrado
 pequeño y esagonos

Figura 18. Conversión al registro de lenguaje natural a partir del registro gráfico realizado por E13 y E19

En general no se presenta la correspondencia semántica, las unidades significantes no muestran asociación con las unidades elementales. Respecto a la univocidad semántica, no se describen imágenes puntual y explícitamente, por lo que al movilizar las representaciones no se mantienen las características totales del registro de partida respecto al de llegada. Los estudiantes realizan una expansión informacional de las representaciones, pero se evidencia la *no congruencia* y por consiguiente no realizan correctamente el proceso de conversión. Al realizar este paso del registro los estudiantes realizan la expansión lexical, realizando asociaciones verbales u ocurrencias respecto al modo gráfico-visual.

- ¿Qué expresiones algebraicas representan las medidas de los lados de la finca?

finca?

$$N^{\circ} 1. (x \cdot x) + (x \cdot x). \quad N^{\circ} 2. (x-y) + (x-y)(y) + (x) + (x-y)$$

$$N^{\circ} 3. (x-y)^2 + (x+y)^2$$

finca:

① $x + x = x^2$

② $(x^2 + y^2 + xy^2 + xy^2) = x^2 + y^2 + xy^2$

③ $(x^2 + y^2 + xy^2 + xy^2) = x^2 + y^2 + xy^2$

Figura 19. Conversión al registro algebraico a partir del registro gráfico realizado por E13 y E17

En las representaciones formadas por los estudiantes existe una *no congruencia*. Las unidades significantes presentes en el registro gráfico no corresponden en su totalidad en la representación de llegada. Por lo tanto, al realizar los cálculos correspondientes no generan la representación correcta, resaltando que tampoco realizan la visualización de forma consiente, pues los datos son evidentes al observar la representación geométrica; finalmente, presentan confusión con respecto a los conceptos de área y perímetro, realizando operaciones al azar.

Por otro lado, ante el interrogante:

- ¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área total de la parte de la finca asignada para el cultivo?

¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área total de la parte de la finca asignada para el cultivo?

$$(x + y)^2$$

¿Cuál es la expresión algebraica que representa el área total de la parte de la finca asignada para el cultivo?

$$xy + y + x$$

Figura 20. Conversión al registro algebraico a partir del registro gráfico realizado por E6 y E17

Los estudiantes no logran generar la representación algebraica, es evidente que existe *no congruencia* entre las representaciones y asocian resultado de actividades realizadas anteriormente sin fijarse en las características de las representaciones actuales.

En general se presenta cierto grado de dificultad al realizar los procesos cognitivos de tratamiento y conversión. Los estudiantes presentan falencias al realizar cálculos internos en la representación algebraica, lo cual también se ve afectado por el conflicto que genera la conversión, pues al no consolidar una representación algebraica adecuada partiendo del registro gráfico, no logran realizar la transformabilidad interna del registro de representación. Para este caso, se detecta que existe contrato didáctico, los estudiantes no interiorizan las preguntas, se limitan a seguir con procedimientos ya realizados. El reto consiste en la persistencia, en cambiar las ideas que se poseen y buscar la mejora continua del docente y con ello la de los estudiantes⁵².

2.3.3 Situación 3. “Preparando el camino”

Se pretende que el estudiante, luego de analizar un problema, logre, empleando los registros de lenguaje natural y geométrico, el proceso de conversión al registro de lenguaje algebraico. A continuación, se presenta una de las actividades propuestas a los estudiantes:

Ítem 1. Para un centro vacacional se diseñó un modelo de piscina que tiene dos secciones. Si el área de la zona de adultos se puede expresar mediante la expresión $x^2 - 144$, ¿cuáles son las expresiones algebraicas para las dimensiones de esta zona?

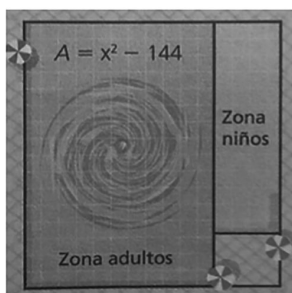


Figura 21. Ilustración modelo de la piscina

⁵² Ibíd.

Los procesos cognitivos que realizaron los estudiantes se muestran a continuación.

$$\begin{array}{l} x^2 - 144 \quad (x^2 - 144) \\ (x^2)^2 - 144 \\ x^4 - 144 \end{array}$$

Figura 22. Conversión a la representación algebraica realizada por E8

La conversión que realiza el estudiante presenta *no congruencia* con la representación de salida, las unidades significantes no se conservan cuando realiza la movilización. Hay una aproximación muy superficial por parte del estudiante E8.

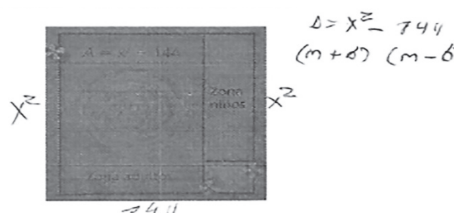


Figura 23. Conversión a la representación algebraica realizada por E4

En este caso, el estudiante E4 presenta una contradicción; realiza asignación a la medida de los lados de la figura, pero al convertir al registro algebraico no las tiene presentes, de esta manera se evidencia *no congruencia* entre el registro y el de llegada.

$$\begin{array}{l} x^2 - 144 \\ (x+12) (12-x) \end{array}$$

Figura 24. Conversión a la representación algebraica realizada por E11

La conversión que realiza el estudiante E11 no es correcta. El problema radica en el tratamiento interno que realiza, los cálculos que realiza no mantienen el orden de aprehensión, si lo desarrolla de esa manera el resultado estará invertido. La expansión que realiza conserva las unidades significantes y el significativo⁵³.

53 Ibid.

Se presenta ahora otra de las actividades propuestas a los estudiantes:

Ítem 2. Teniendo en cuenta los procesos que desarrolló anteriormente, realice el registro gráfico de las expresiones algebraicas $(m+6)(m-6)$ y $(8m-4)(8m+4)$ y describa los procedimientos. Debe incluir la medida de cada uno de los lados de la representación.

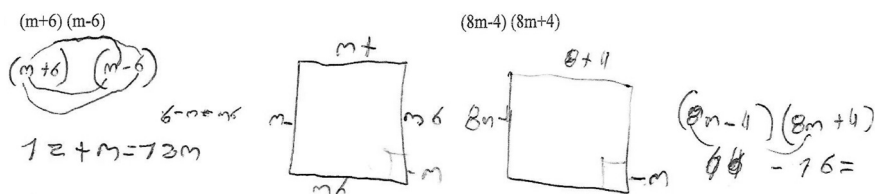


Figura 25. Conversión al registro geométrico y tratamiento interno del registro algebraico realizado por E4

El estudiante E4 en definitiva no realiza de forma consciente los procesos cognitivos, la formación de las imágenes mentales que crea las plasma con total falta de cognición de su labor como estudiante, la conversión es notablemente *no congruente*, no existe relación entre la representación de salida y la de llegada, las unidades significantes están ausentes en todo el proceso que desarrolla y el tratamiento es totalmente incorrecto, no moviliza los registros de representación.

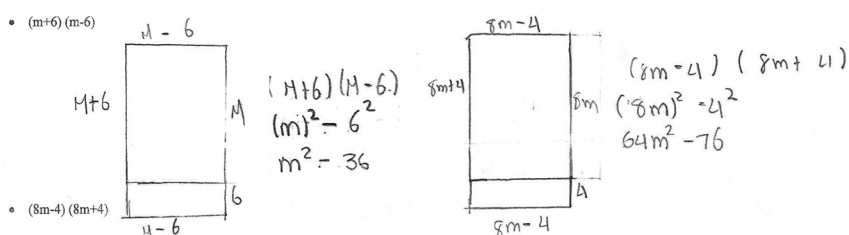


Figura 26. Conversión al registro geométrico y tratamiento interno del registro algebraico realizado por E3.

En este caso el estudiante E11 realiza los procesos cognitivos de formación, tratamiento y conversión de manera adecuada, por lo anterior se puede concluir que el estudiante realiza tareas de com-

prensión y producción de acuerdo con la movilización por todos los registros de representación que se pretendían. El tratamiento interno es coherente y las unidades significantes siempre se mantienen. Existe la ausencia de la descripción textual de lo que construye de acuerdo con la coherencia de la temática.

Los estudiantes realizan con más facilidad la conversión a la representación algebraica, de igual manera que el tratamiento en el interior de este registro. El paso al lenguaje algebraico carece de coherencia con lo que se pretende, no realizan la gráfica con las unidades significantes del registro de salida. Los estudiantes no efectúan el proceso de descripción del procedimiento realizado, se limitan a ejecutar operaciones y representaciones sin explicar ni consignar las consideraciones que realizan en el proceso, les cuesta relatar lo que hacen. En esta ocasión es importante reflexionar sobre el papel y la importancia que desempeñan las representaciones en esta secuencia de enseñanza pues son un medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales, es decir, para hacerlas visibles o accesibles a los demás.

2.3.4 Situación 4. “A caminar”

En esta última parte de la secuencia de enseñanza se espera que los estudiantes logren realizar los procesos cognitivos de tratamiento y conversión al realizar la factorización de la diferencia de cuadrados perfectos. Para esto se solicitó:

- Cree un problema que involucre la información de la siguiente figura

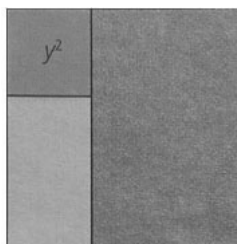


Figura 27. Representación geométrica problematizadora

Luego realice la expansión y factorización de las expresiones algebraicas involucradas.

Respecto a las actividades se encontraron los siguientes razonamientos.

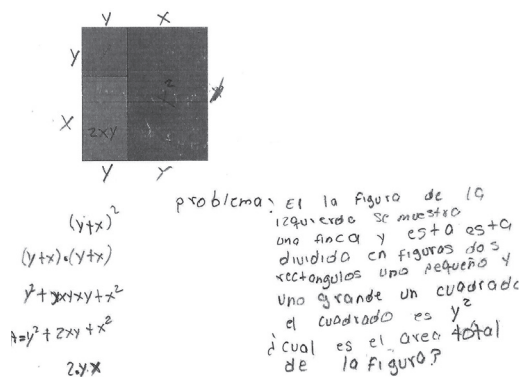


Figura 28. Procesos cognitivos que realiza E15 partiendo del registro geométrico.

La conversión construida partiendo de registro gráfico carece de univocidad semántica de igual manera que correspondencia semántica; algunas unidades significantes del registro de salida se pierden al realizar la movilización del registro y, en consecuencia, se presenta *no congruencia*⁵⁴. Respecto al lenguaje algebraico, las expresiones relacionadas no coinciden con lo representado y la descripción que realiza del problema. Por lo anterior, el estudiante no logra concretar las actividades cognitivas.

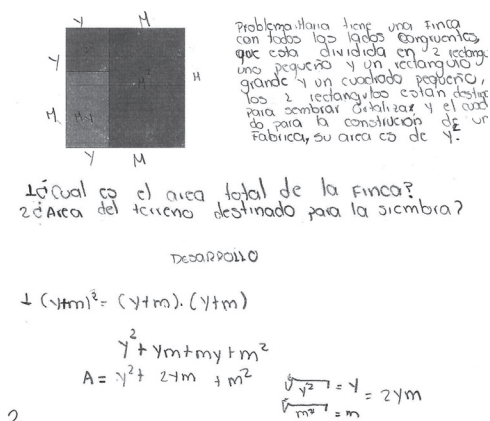


Figura 29. Procesos cognitivos que realiza E3 partiendo de la representación geométrica.

54. Ibíd.

La conversión al lenguaje natural se da siguiendo un patrón, el estudiante reescribe el ejercicio que se presenta en Situación 1, cambia algunas palabras, pero en este caso existe contrato didáctico. En pocas palabras, el estudiante centra la actividad cognitiva en realizar paráfrasis, luego, al pasar a la representación algebraica, no logra organizar las expresiones conservando las características y la univocidad semántica terminal y, por lo tanto, no logra realizar la conversión de manera congruente.

Respecto a la secuencia “Dando pasos” creada para orientar la diferencia de cuadrados perfectos, los estudiantes movilizan los registros semióticos a través de las diferentes representaciones construidas, realizan las actividades cognitivas de formación, tratamiento y conversión. Los avances alcanzados son significativos con relación a la primera actividad de esta secuencia, pero a pesar del esfuerzo que realizan los estudiantes, se presentaron algunas dificultades para realizar los procesos cognitivos. No logran realizar de manera correcta la movilización de los registros, les cuesta relacionar datos, resultados, símbolos y gráficos de actividades que se han realizado anteriormente, como es el caso de la factorización del trinomio cuadrado perfecto; ellos asocian constantemente lo aprendido en esta actividad y no permiten que se rompa el contrato didáctico, pues realizan los procesos semejantes a estos.

2.4 REFLEXIONES FINALES

El proceso investigativo es una labor que implica un constante acercamiento con todos los sujetos y objetos de la investigación. Es una búsqueda incansable de información y variables pertinentes, implica preocuparse por cambiar una forma de pensar, inicialmente la del investigador y luego de los sujetos que lo rodean, es una reflexión inquebrantable con el fin de mantener firmes los nuevos ideales, es buscar la mejora continua de la labor pedagógica, social y laboral que se desempeña a diario. Además, el contexto juega un papel fundamental tanto en la elaboración como en la ejecución de las secuencias didácticas. El conocer a los estudiantes es indispensable para mejorar los procesos y, de esta manera, poder desarrollar actividades contextualizadas teniendo en cuenta características propias de la zona o región, empleando términos familiares para los estudiantes y que

implícitamente los hace reflejarse en la clase de matemáticas y en las prácticas que realizan constantemente.

Por otra parte, algunos estudiantes muestran temor y apatía con la ejecución de nuevas metodologías, pues la clase se había tornado similar. Al realizar las secuencias de enseñanza los estudiantes sienten duda de escribir sus propias consideraciones y temen cometer errores. Pero luego de ganar su confianza y generar cierta familiaridad se consigue concretar ideas, consideraciones y aportes muy importantes para los procesos pedagógicos e investigativo. La interacción que existe entre el estudiante y su par es de gran ayuda, pues los estudiantes deben realizar la justificación de cada una de las representaciones construidas. Al realizar este ejercicio se debe evidenciar una coherencia entre las representaciones y la argumentación dada, de esta manera se logra evidenciar la existencia de algunos errores cometidos, pero de igual manera su enmienda inmediata, consolidando representaciones acordes con las condiciones iniciales.

Finalmente, con la intervención realizada se pudo evidenciar que las representaciones semióticas son un instrumento fundamental para el desarrollo de actividades matemáticas, y de esta manera se buscó que los estudiantes, por medio de diversos registros semióticos y de representación, consiguiesen comprender, analizar y aprender temas que para ellos son confusos y abstractos, como lo es el álgebra elemental para el grado octavo, al hacer referencia a las transformaciones intencionales y cuasi-instantáneas que realizan los estudiantes cuando emplean diversas representaciones. Lo anterior, concordando con lo escrito por Duval: “toda actividad cognitiva humana, se basa en la complementariedad de estas dos representaciones”⁵⁵.

Una vez terminado el tránsito por la Maestría en Educación Matemática quedan más preguntas que respuestas, reconociendo que —conociendo un poco más sobre las teorías de la didáctica de la matemática—, todas las actuaciones dentro del aula de clase se convierten en un constante cuestionamiento, pero la noble misión que tenemos como maestros de perfeccionar lo intangible y “moldear” las personas que pasan por nuestras manos (los estudiantes), debe

55 Ibíd.

mantenernos siempre a la vanguardia en el conocimiento e implementación de dichas teorías de la enseñanza y el aprendizaje.

2.5 BIBLIOGRAFÍA

Libros

Corbetta, Piergiorgio. *Metodología y técnicas de investigación social*. Madrid: McGraw-Hill, 2007.

D'Amore, Bruno, Martha Isabel Fandiño, Inés Marazzani y Silvia Sbaragli. *La didáctica y la dificultad en matemática. Análisis de situaciones con falta de aprendizaje*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio, 2010.

Duval, Raymond. *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali: Universidad del Valle, 1999.

Duval, Raymond y Adalira Saénz-Ludlow. *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas*. Bogotá: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2016.

Hernández Sampieri, Roberto, Carlos Fernández Collado, y Pilar Baptista Lucio. *Metodología de la investigación*. México: McGraw-Hill, 2014.

Mason, John, Alan Graham, David Pimm y Norman Gowar. *Rutas hacia el Álgebra. Raíces del Álgebra*. Traducido por Cecilia Agudelo Valderrama. Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, 1999.

Poveda R., Gabriel. *Historia de las matemáticas en Colombia*. Medellín: Ediciones Universidad Autónoma Latinoamericana, 2012.

Ribeiro, Lair. *La comunicación eficaz: Transforme su vida personal y profesional manejando su capacidad de comunicación*. Barcelona: Ediciones Urano, 1999.

Artículos de revistas

Jiménez, Alfonso y Luz Miryam Pineda, “Comunicación y argumentación en clase de matemáticas”, *Educación y Ciencia*, n.º 16, 2013: 101-116.

Ríos, Rafael, “Historia de la enseñanza en Colombia: entre saberes y disciplinas escolares”, *Pedagogía y Saberes*, n.º 42: 9-20.

Suárez, Nury, Sandra Galindo y Alfonso Jiménez, “La comunicación: eje en la clase de matemáticas”, *Praxis & Saber*, vol. 1, n.º 2, 2010: 173-202.

Tamayo, Oscar E., “Representaciones semióticas y la evolución conceptual en la enseñanza de las ciencias y las matemáticas”, *Revista Educación y Pedagogía*, vol. 18, n.º 45, 2006: 39-49.

Consultas de Internet

Collazos, César Alberto, Luis Guerrero y Adriana Vergara “Aprendizaje Colaborativo: un cambio en el rol del profesor”. En *Actas del Tercer Congreso de Educación Superior en Computación*, Punta Arenas, Chile, 2001. <http://users.dcc.uchile.cl/~luguerre/papers/CESC-01.pdf>

Lorente, Ana, “Historia del álgebra y de sus textos”, s. f. https://s3.amazonaws.com/academia.edu.documents/38983595/Historia_del_algebra_y_de_sus_textos.pdf (Consultado en junio de 2018).

CAPÍTULO 3. SIGNIFICADO GLOBAL DE LA PROPORCIONALIDAD DESDE EL CONTEXTO VARIACIONAL

Miguel Ángel Hurtado Martínez
Omaida Sepúlveda Delgado

3.1 CONTEXTO DE LA INVESTIGACIÓN

Existe una diversidad de significados parciales para los objetos matemáticos razón y proporción, los cuales se consideran fundamentales para la enseñanza y el aprendizaje de los objetos matemáticos de estudio y en particular en la búsqueda del desarrollo del razonamiento proporcional de los estudiantes¹. El estudio de estos objetos matemáticos, su significado global y el de referencia son importantes por su relación con disciplinas escolares como las artes, la física, la química, entre otras áreas, y por su lugar en la comprensión de una gran variedad de situaciones prácticas cotidianas².

La importancia y necesidad del estudio de los objetos razón y proporción se evidencia en la diversidad de investigaciones realizadas durante los últimos sesenta años, partiendo de los primeros trabajos realizados por Piaget e Inhelder (1958)³ sobre el razonamiento formal de los adolescentes, hasta los estudios realizados desde di-

1 Édgar A. Guacaneme, “Significados de los conceptos de razón y proporción en el Libro V de los *Elementos*”, en *Pensamiento, epistemología y lenguaje matemático*, editado por Olga Lucía León, Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2012.

2 María Burgos, Pablo Beltrán, Belén Giacomone y Juan D. Godino, “Conocimientos y competencia de futuros profesores de matemáticas en tareas de proporcionalidad”, *Educação e Pesquisa*, vol. 44, 2018.

3 Gilberto Obando Z., “Sistema de prácticas matemáticas en relación con las Razones, las Proporciones y la Proporcionalidad en los grados 3° y 4° y de una institución educativa de la Educación Básica” (Tesis de doctorado en Educación, Universidad del Valle, 2015) file:///C:/Users/ASUS_/Downloads/CB-0519794%20(3).pdf (Consultado el 12 de agosto de 2018).

ferentes enfoques: cognitivo, didáctico, curricular, epistemológico, antropológico y semiótico, los cuales han permitido la consolidación del razonamiento proporcional como línea de investigación en Educación Matemática.

En particular, en el contexto colombiano, los objetos razón y proporción se encuentran como propuesta curricular para la enseñanza y el aprendizaje en los documentos de los “Lineamientos Curriculares”⁴ y en los “Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas”⁵, propuestos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) como objetos transversales para el desarrollo de los cinco tipos de pensamiento matemático: el numérico, el espacial, el métrico, el estocástico y el variacional. En este marco propuesto por el MEN, las razones y las proporciones se identifican como objetos del conocimiento que deben ser tratados en los diferentes grados de la educación básica y media, bajo una propuesta curricular que los integra desde una perspectiva del campo conceptual de las estructuras multiplicativas⁶.

Partiendo de la anterior perspectiva, los procesos de enseñanza y aprendizaje de los objetos razón y proporción en el contexto colombiano son complejos, tanto para profesores como para estudiantes, por la diversidad de significados que pueden tomar respecto a: lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos⁷. En relación con la complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje, el tratamiento que se les da en las Instituciones Educativas (IE) de Colombia a los objetos razón y proporción se enfoca en el manejo y la aplicación de fórmulas y recursos algebraicos, lo que genera en los estudiantes dificultades para la comprensión de dichas nociones, además se evidencia el hecho que en las IE la enseñanza y el aprendizaje de estos objetos se enfocan principalmente a la potencia-

4 Ministerio de Educación Nacional (MEN), “Lineamientos Curriculares - Matemáticas”, Bogotá: 1998.

5 Ministerio de Educación Nacional (MEN), “Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas”, Bogotá, 2006.

6 Obando, Sistema de prácticas, 24.

7 Obando, Sistema de prácticas, 28.

ción o desarrollo del pensamiento numérico, presentando una débil articulación con los otros tipos de pensamiento matemático⁸.

En este rumbo se evidencia⁹ que la organización curricular a nivel nacional, y relativa a la enseñanza de la aritmética en la Educación Básica, es descontextualizada, y, por lo tanto, la solución de problemas no juega el papel de mediador en la construcción del conocimiento por parte de los alumnos. En este sentido, las dificultades de los alumnos se encuentran en función de la estructura característica de los enunciados, la estructura semántica (significado) de la proporcionalidad y los procesos cuantitativos de solución.

Desde esta panorámica, diversas investigaciones¹⁰ dan a conocer que, en algunas ocasiones, las dificultades relacionadas con los objetos razón y proporción no solo se presentan para los estudiantes, sino también para los profesores de matemáticas al desconocer la diversidad de significados de estos objetos matemáticos: este desconocimiento hace que el profesor enseñe a los estudiantes la proporcionalidad desde el formalismo, es decir, dando el objeto matemático ya terminado, acabado y carente de significado, reduciéndolo a la aplicación de algoritmos como la regla de tres simple o compuesta, y por tanto, dejando de lado el desarrollo del razonamiento proporcional. Una de las posibles causas del formalismo¹¹ con que se enseña la proporcionalidad en las IE en Colombia se relaciona, en algunos casos, con la no reflexión de los profesores sobre los significados que dan los estudiantes de la proporcionalidad, así como aquellos que surgieron en la historia de las matemáticas.

Bajo estas reflexiones, se considera importante estudiar la emergencia de los significados de los objetos razón y proporción en los

8 Eruin A. Sánchez, "Razones, proporciones y proporcionalidad en términos de variación y correlación entre magnitudes", *Revista Sigma*, vol. 11, n.º 1, 2013.

9 Gloria García O. y Celly Serrano, *La comprensión de la proporcionalidad, una perspectiva social y cultural*, Bogotá: Grupo Editorial Gaia, 1999, 28-38.

10 Obando, Sistema de prácticas, 19.

11 Luis Carlos Arboleda y Gloria Castrillón, "La historia y la educación matemática en el 'horizonte' conceptual de la pedagogía", *Quipu. Revista Latinoamericana de Historia de las Ciencias y la Tecnología*, vol. 14, n.º 1, 2012.

distintos contextos: históricos, culturales y sociales¹², proporcionados por estudios históricos y epistemológicos, lo cual le permite al profesor comprender los significados atribuidos a estos objetos desde su génesis, evolución y constitución, y reflexionar sobre dichos significados lo llevarán a innovar en su práctica y proponer situaciones problema de aprendizaje interesantes a los estudiantes y en contextos de la vida real, la semirrealidad y las matemáticas¹³; así mismo, con este análisis de los objetos matemáticos proporcionados por los estudios epistemológicos, el profesor llegará a entender la forma de pensar de sus estudiantes y la diversidad de significados atribuidos a la proporcionalidad en sus prácticas matemáticas. En el trabajo de Hurtado¹⁴, se ha realizado un estudio histórico y epistemológico de los objetos matemáticos razón y proporción, el cual ha permitido diseñar situaciones problema para favorecer la emergencia de los significados personales de los objetos razón y proporción.

Teniendo en cuenta las anteriores consideraciones, este estudio surge de la reflexión de los investigadores¹⁵ en relación con los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, específicamente del significado de los objetos razón y proporción. En esta dirección, se observa cómo los objetos matemáticos que se pretenden enseñar, en ocasiones no son comprendidos por los estudiantes, presentándose dificultades al momento de orientar la práctica docente: desde esta visión, algunos estudiantes de grado 7º, al resolver problemas de proporcionalidad, prefieren la implementación de cálculos rápidos como la regla de tres simple o compuesta, sin evidenciar la comprensión de los procedimientos realizados y menos aún la verificación de los resultados obtenidos; otros estudiantes cuestionan las reglas y prefieren

12 Guacaneme, “Significados”.

13 Ole Skovsmose, “Escenarios de investigación”, en *Educación Matemática Crítica: una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas*, compilado por Paola Valero y Ole Skovsmose, Bogotá: Universidad de los Andes / Aalborg University, 2012.

14 Miguel Hurtado Martínez, “Significado global de la proporcionalidad en las prácticas matemáticas de los estudiantes de grado séptimo” (Tesis de maestría en Educación Matemática, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, 2019), https://repositorio.uptc.edu.co/bitstream/001/2991/1/TGT_1611.pdf

15 Omaida Sepúlveda D., “Conocimiento didáctico-matemático del profesor universitario para la enseñanza del objeto grupo” (Tesis de doctorado en Ciencias de la Educación, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, 2016), http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/Tesis_Omaida.pdf. (Consultado el 10 de junio de 2018).

usar técnicas como reducción a la unidad, uso de escalas (aprendidas en el área de dibujo técnico) o simplemente usar multiplicaciones y divisiones para resolver los problemas de proporcionalidad¹⁶.

También se ha evidenciado que los estudiantes, al momento de resolver problemas de proporcionalidad directa o inversa, no saben qué algoritmo usar, llevándolos a preguntar frecuentemente al profesor si se debe multiplicar en equis (procedimiento que se acostumbra usar para resolver problemas de proporcionalidad directa) o en línea recta (usual para resolver problemas de proporcionalidad inversa). En este sentido, diversos investigadores¹⁷ han reconocido que, debido al uso mecánico de algoritmos, se puede resolver un problema de proporcionalidad sin tener garantía de que el desarrollo del razonamiento proporcional haya tenido lugar. Al respecto, Hoffer señala:

[...] la capacidad de realizar operaciones mecánicas con proporciones no necesariamente significa que los estudiantes entienden las ideas subyacentes al pensamiento proporcional (...) la capacidad de comprender firmemente la proporcionalidad es un punto decisivo en el desarrollo mental.¹⁸

Desde estas reflexiones, se considera que los estudiantes, más que aplicar operaciones mecánicas, deben comprender los procesos subyacentes al razonamiento proporcional al resolver problemas, de esta forma se considera fundamental diseñar y proponer a los estudiantes situaciones problema que sirvan como mediadoras del aprendizaje; para llegar a contextualizar y personalizar los significados de los objetos razón y proporción.

D'Amore, en relación con la idea de situación problema (gestada a finales de los años 70), menciona que:

16 Hurtado, "Significado global de la proporcionalidad".

17 Patricia Perry *et al.*, *Transformar la enseñanza de la proporcionalidad en la escuela: un hueso duro de roer*, Bogotá: Una empresa docente-Universidad de los Andes, 2003.

18 Hoffer, A. R. "Ratios and proportional thinking", en *Teaching mathematics in grades K-8: Research based methods*, editado por Th. R. Post y publicado en Boston por Allyn and Bacon, en 1988.

[...] se trata de una situación de aprendizaje concebida de manera tal que los estudiantes no puedan resolver la cuestión por simple repetición o aplicación de conocimientos o competencias adquiridas, sino que se necesita la formulación de nuevas hipótesis.¹⁹

En consecuencia, en el estudio se diseña y aplica una situación problema relacionada con los objetos razón y proporción desde un contexto variacional, con el propósito de favorecer la construcción y emergencia de significados parciales (pretendidos) para la generación de prácticas matemáticas por parte de los estudiantes al resolver la situación propuesta.

En el estudio histórico y epistemológico de Hurtado²⁰, en relación con los objetos matemáticos razón y proporción (significados institucionales), se presenta el diseño y aplicación de tres situaciones problema: la primera, desde un contexto variacional; la segunda, desde un contexto métrico y geométrico y la tercera, desde un contexto aritmético: la aplicación de estas situaciones problema a los estudiantes de grado séptimo permitió obtener información significativa relacionada con los significados de los objetos razón y proporción, significados que se consideran emergentes de las prácticas matemáticas de los estudiantes (significados personales).

En este capítulo se reporta el proceso investigativo que se siguió para el análisis de las prácticas matemáticas que realizaron 28 estudiantes de grado séptimo de educación básica de una IE de la ciudad de Tunja del departamento de Boyacá, al resolver una situación problema con el propósito de dar respuesta a la pregunta de cuáles son los significados de los objetos razón y proporción presentes en las prácticas matemáticas de un grupo de estudiantes de grado séptimo al resolver una situación problema de proporcionalidad en un contexto variacional.

19 Bruno D'Amore, *Didáctica de la Matemática*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio, 2011, 293-318.

20 Hurtado, "Significado global de la proporcionalidad".

Para dar respuesta a la pregunta de estudio, la investigación se desarrolla en cuatro fases; en la primera se diseña la situación problema, titulada: “Modelo matemático para relacionar el radio y el perímetro del círculo”, cuyo propósito consiste en activar prácticas matemáticas en los estudiantes para indagar por los conocimientos puestos en juego en la comprensión de los objetos matemáticos razón y proporción.

La segunda fase del estudio corresponde al desarrollo de un análisis didáctico a priori²¹ que comprende dar una posible solución al problema e identificar los objetos matemáticos primarios puestos en juego: lenguajes, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos que pueden llegar a emerger de las prácticas matemáticas al resolver la situación propuesta: este análisis didáctico permite identificar posibles conflictos de aprendizaje que surgen en las prácticas desarrolladas por los estudiantes.

En la tercera fase se implementa la situación problema y se recolecta la información emergente del sistema de prácticas de los estudiantes a través de grabaciones de audio, de interacciones entre profesor y estudiantes y algunos protocolos escritos.

Finalmente, en una cuarta fase se realiza el análisis de la dimensión cognitiva (análisis de los significados personales), emergentes del sistema de prácticas matemáticas activadas en los estudiantes al resolver la situación propuesta; en esta fase se caracterizan elementos lingüísticos, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos. Este análisis de la dimensión cognitiva corresponde a la síntesis de los significados personales (global, declarado y logrado) de los estudiantes²².

21 Juan Godino, “Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática”, en *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*, Universidad de Granada, 2017, 1-20, <http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.htm>. (Consultado el 2 de enero de 2018)

22 Walter Castro Gordillo, “Evaluación y desarrollo de competencias de análisis didáctico de tareas sobre razonamiento algebraico elemental en futuros profesores” (Tesis de doctorado en Matemáticas con especialidad en Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada (España), 2011), https://www.ugr.es/~jgodino/Tesis_doctorales/Walter_Castro_tesis.pdf (Consultado el 5 de agosto de 2018)

3.2 CONSIDERACIONES TEÓRICAS

Los marcos teórico y metodológico de la investigación corresponden al Enfoque Ontosemiótico (EOS) del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos²³ y, por tanto, se desarrolla en relación con sus planteamientos teóricos y metodológicos; se trabaja el estudio desde un enfoque cualitativo (CUAL)²⁴, el cual se enfoca en la caracterización de los significados de los objetos razón y proporción, emergentes de las prácticas matemáticas de los estudiantes.

El EOS centra su atención en el problema de los significados y la construcción del conocimiento matemático mediante el análisis y la propuesta de una ontología matemática explícita con presupuestos antropológicos, semióticos y socioculturales. El estudio del proceso de asignar o identificar significados parciales a un objeto matemático considera ciertos niveles de análisis: la práctica matemática, los objetos, los significados y las configuraciones epistémicas y cognitivas.

Entre los conceptos más importantes utilizados en el desarrollo del estudio, y específicamente en relación con el análisis de los significados de los objetos razón y proporción, emergentes de las prácticas matemáticas de los estudiantes, en el EOS se encuentra, en primer lugar, el concepto de práctica matemática, que corresponde a toda actuación o expresión (verbal, gráfica, gestual, etc.) realizada por alguien para resolver un problema matemático, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla, a otros contextos y problemas; en este sentido, las prácticas pueden ser institucionales (grupo de personas que comparten una clase específica de situaciones problema) o personales (estudiante que resuelve la situación problema). En este estudio se analizan las prácticas personales, que corresponden a las producciones escritas y verbales de los estudiantes al resolver la situación problema propuesta relacionada con los objetos razón y proporción.

El objeto matemático se considera en el EOS como cualquier entidad referida en un discurso matemático. El objeto matemático designa

²³ Godino, “Construyendo un sistema modular e inclusivo”.

²⁴ Hernández, Fernández y Baptista, *Metodología de la investigación*, 468-506.

todo lo que es indicado, señalado o nombrado cuando se construye, comunica o aprende matemáticas. El EOS considera que los objetos matemáticos necesitan ser vistos como símbolos de unidades culturales que emergen de un sistema de usos ligado a las actividades de resolución de problemas que efectúan grupos de personas y van evolucionando con el tiempo²⁵. Por ello, no se puede reducir el significado del objeto a la sola definición matemática.

El EOS propone la siguiente tipología de objetos matemáticos o entidades primarias: a) Lenguaje: Términos y expresiones matemáticas, símbolos, representaciones gráficas, etc. b) Situaciones-problema:

Aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios, etc. c) Conceptos: Entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición. d) Propositiones: Enunciados para las cuales se requiere una justificación o prueba. e) Procedimientos: Técnicas de cálculo, operaciones, algoritmos. f) Argumentos: Justificaciones, demostraciones, o pruebas de las proposiciones usadas²⁶.

Los objetos matemáticos o entidades primarias determinan configuraciones respecto a cada significado parcial dado a los objetos razón y proporción, los cuales emergen de la solución a la situación problema: estas configuraciones se clasifican en epistémicas (del investigador) y cognitivas (del estudiante). En este sentido, la configuración epistémica, contempla el estudio de los seis tipos de entidades primarias que se relacionan entre sí, formando configuraciones más complejas, las cuales se definen como redes de objetos, que son los que intervienen y emergen de los sistemas de prácticas matemáticas²⁷.

La propuesta metodológica del EOS permite efectuar un análisis a la dimensión epistémica, el cual comprende tres objetivos: el primero es caracterizar las prácticas matemáticas relacionadas con soluciones *a priori* de la situación problema: la solución *a priori* se realiza

25 Bruno D'Amore y Juan Godino, "El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática", *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 10, n.º 2, 2007.

26 Godino, "Construyendo un sistema modular e inclusivo".

27 Castro y Rivas, "Aportes del estudio de configuraciones epistémicas".

desde la perspectiva de los investigadores. El segundo objetivo corresponde a la exploración de los objetos y significados puestos en juego en la solución del problema, el cual se asume como un análisis de referencia que permite establecer hipótesis relacionadas con las posibles prácticas de los estudiantes. Y, finalmente, el tercer objetivo propuesto corresponde a la identificación de los posibles conflictos de significado que pueden surgir en las soluciones que los estudiantes dan al problema²⁸.

Además, en el marco teórico del EOS se propone efectuar el análisis de la dimensión cognitiva en el análisis didáctico de los procesos de instrucción: este procedimiento es pertinente para llegar al diseño e implementación de los procesos de estudio: esta caracterización de la dimensión cognitiva consiste en identificar prácticas matemáticas (operativas y discursivas) con relación a cómo aprenden, razonan y entienden las matemáticas los estudiantes y cómo progresan en su aprendizaje²⁹. En el análisis de la dimensión cognitiva se identifican y caracterizan las configuraciones cognitivas relacionadas con los objetos primarios: elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos, entre otros, de los estudiantes. El análisis de las dimensiones epistémica y cognitiva constituye, finalmente, el sistema de prácticas matemáticas que permite caracterizar los significados de los objetos matemáticos razón y proporción, activados en la resolución de la situación problema propuesta.

En el estudio se consideran importantes otros conceptos que no se toman del EOS, como el razonamiento proporcional, campo conceptual, estructuras multiplicativas y pensamiento variacional, necesarios para el análisis de las prácticas matemáticas y que permiten la comprensión de los significados de los objetos razón y

28 Walter F. Castro y Mauro Rivas, “Aportes del estudio de configuraciones epistémicas y cognitivas sobre la proporcionalidad en la formación inicial de profesores de primaria”, en *Memorias del 12.º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (ECME)*, Armenia (Quindío): Gaia, 2011, 131-142, <http://funes.uniandes.edu.co/2589/1/RivasAportesAsocolme2011.pdf>. (Consultado el 2 de marzo de 2018)

29 Godino, “Construyendo un sistema modular e inclusivo”.

proporción. En relación con el razonamiento proporcional, Lamon³⁰ da a conocer que este tipo de razonamiento tiene que ver con los argumentos que permiten soportar las enunciaciones hechas y que establecen las relaciones estructurales entre cuatro cantidades. Estas enunciaciones están hechas en contextos que al mismo tiempo involucran la covariación entre cantidades y la invariancia de razones o productos. Por tanto, el razonamiento proporcional puede considerarse como la habilidad que no solo permite diferenciar la relación multiplicativa entre dos cantidades, sino, también, como la capacidad de poder extender dicha relación a otro par de cantidades.

Otro concepto de gran importancia en el estudio corresponde a los campos conceptuales³¹ y, particularmente, al campo de las estructuras multiplicativas: un campo conceptual designa el conjunto de conceptos y teoremas que permite analizar una serie de situaciones problema. Este conjunto de conceptos y de teoremas está presente de manera informal y a nivel previo en los sujetos a través de teoremas y conceptos en acto o en acción, definidos como relaciones matemáticas que son tomadas en cuenta por los estudiantes al seleccionar una operación o una secuencia de operaciones para resolver el problema.

El campo conceptual de las estructuras multiplicativas³² es el conjunto de situaciones que requieren una multiplicación, una división o una combinación de tales operaciones. Igualmente, se considera como el conjunto de los conceptos: proporción simple y compuesta, función lineal, múltiplo, combinación lineal, fracción, divisor, razón y los teoremas relacionados con las propiedades de isomorfismo de la función lineal y su generalización a las relaciones no enteras: propiedades que se refieren al coeficiente constante entre dos variables linealmente ligadas, y algunas propiedades específicas de la bilinealidad que permiten analizar estas situaciones.

30 Lamon, S. "Rational number and proportional reasoning" Toward a theoretical framework for research, en F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook Of Research On Mathematics Teaching and Learning*, publicado en New York, NY, en 2007.

31 Gérard Vergnaud, *El niño, las matemáticas y la realidad: Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*, México: Trillas Editorial, 1991, 197-222.

32 Obando, Sistema de prácticas, 13.

En el diseño de la situación problema se establece como objetivo la articulación del razonamiento proporcional con el pensamiento variacional. El pensamiento variacional³³ está relacionado con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos. Este pensamiento cumple un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y las matemáticas mismas.

En relación con el pensamiento variacional, este se desarrolla en estrecha relación con los otros tipos de pensamiento matemático (el numérico, el espacial, el de medida o métrico y el aleatorio o probabilístico) y con otros tipos de pensamiento más propios de otras ciencias, en especial a través del proceso de modelación y situaciones naturales y sociales por medio de modelos matemáticos.

En particular, la relación con otros pensamientos aparece con mucha frecuencia, porque la variación y el cambio, aunque se representan usualmente por medio de sistemas algebraicos y analíticos, requieren de conceptos y procedimientos relacionados con distintos sistemas numéricos (en particular, del sistema de los números reales, fundamentales en la construcción de las funciones de variable real), geométricos, de medidas y de datos, y porque todos estos sistemas, a su vez, pueden presentarse en forma estática o en forma dinámica y variacional.

3.3 ANÁLISIS DIDÁCTICO A PRIORI

Se realiza un análisis didáctico *a priori* para caracterizar la dimensión epistémica del proceso de instrucción, según los supuestos teóricos del EOS³⁴. Para esto se inicia con la propuesta de solución a la situación problema desde la perspectiva de los autores del es-

33 Carlos Eduardo Vasco, *Didáctica de las matemáticas: Artículos selectos*, Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional, 2006, 133-148.

34 Godino, "Construyendo un sistema modular e inclusivo".

tudio, posteriormente se analizan los objetos primarios: elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos emergentes de la solución del problema, este análisis de objetos primarios caracteriza la dimensión epistémica del análisis didáctico.

Finalmente, los objetos y significados evidenciados en la dimensión epistémica del análisis didáctico sirven de referente para caracterizar los significados emergentes de las prácticas matemáticas de los estudiantes (configuración cognitiva) y permiten identificar posibles conflictos de aprendizaje por parte de los estudiantes al resolver la situación propuesta.

3.4 ¿QUÉ OCURRIÓ EN EL AULA DE CLASE?

La implementación de la situación problema: Construcción de un Modelo Matemático para relacionar el radio y el perímetro del círculo, tenía como objetivo general identificar los objetos primarios emergentes de las prácticas matemáticas de los estudiantes, lenguajes, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos activados en la solución de la situación problema.

En el diseño de la situación se consideraron tres preguntas relevantes, cada una con un propósito específico:

Pregunta 1. Indaga por los conocimientos puestos en juego en la comprensión del significado geométrico de π (π) como razón.

Pregunta 2. Indaga por las formas como los estudiantes construyen o crean una expresión algebraica de proporcionalidad para relacionar el perímetro y el diámetro del círculo.

Pregunta 3. Indaga por las formas como los estudiantes argumentan y representan la correlación positiva o la proporcionalidad directa en forma tabular y gráfica.

A continuación se presenta la situación problema:

Construcción del Modelo Matemático que relaciona el radio y el perímetro del círculo

Situación–problema: Medir el contorno y el diámetro de cinco objetos que tengan forma circular (CD, moneda, tapa, balde, etc.). De acuerdo con la información obtenida de los objetos circulares completar la tabla y contestar las preguntas 1 a 3.

Objeto circular	Medida del contorno o perímetro	Medida del diámetro	Razón entre el perímetro y el diámetro

1. ¿Existe alguna relación entre el perímetro y la medida del diámetro de cada objeto circular? ¿Sí, no, por qué?
2. ¿Se puede hallar el perímetro de cualquier objeto circular conociendo la medida de su diámetro? Justificar la respuesta.
3. Completar la tabla según los radios indicados, luego realizar una gráfica que relacione los datos. ¿Qué puede concluir de la gráfica?

Radio (cm)	0	1	2	3	4	5
Perímetro (cm)						

Figura 30. Práctica matemática aplicada a los estudiantes de grado séptimo. Fuente: elaboración propia.

Una posible práctica matemática para resolver la situación problema, desde el punto de vista de los autores, se describe a continuación:

1. De acuerdo con la información obtenida de los *objetos circulares* completar la tabla.

Al completar la tabla con los perímetros y las medidas de los diámetros de cinco objetos circulares se pueden obtener los siguientes datos:

Objeto circular	Perímetro	Medida del diámetro	Razón entre el perímetro y el diámetro
Boca de vaso plástico	23,6 cm	7,3 cm	3,2328767123...
Tapa de gaseosa	8,9 cm	2,8 cm	3,17857142286...
Moneda de \$ 100	6,6 cm	2 cm	3,3
CD	39,1 cm	11,9 cm	3,2857142857...
Boca de caneca de basura	92 cm	30 cm	3,06666666666...

Tabla 1. Solución dada por los autores para el completado de la tabla de la situación problema. Fuente: elaboración propia.

1. ¿Existe alguna relación entre el perímetro y la medida del diámetro de cada objeto circular?
¿Sí, no, por qué?

Sí, porque la razón entre el perímetro (P) y el diámetro (D) de un círculo es igual a pi (π)
Simbólicamente: $\frac{P}{D} = \pi$.

Sí, porque el perímetro (P) de un círculo es pi (π) veces el diámetro (D). Simbólicamente: $P = D \cdot \pi$

Sí, porque la razón entre perímetro (P) y el número pi es igual al diámetro (D). Simbólicamente es: $\frac{P}{\pi} = D$.

2. ¿Se puede hallar el perímetro de cualquier objeto circular conociendo la medida de su diámetro?
¿Sí, no, por qué?

Sí, porque se puede multiplicar la medida del diámetro por pi (π). Simbólicamente: $P = D \cdot \pi$

3. Completar la tabla según los radios indicados, luego realizar una gráfica que relacione los datos.
¿Qué puede concluir de la gráfica?

La tabla se completa al multiplicar el diámetro (dos veces el radio) por pi (π), los perímetros aproxima-

dos se obtienen al multiplicar el diámetro por 3.14 (valor aproximado de pi (π)).

Radio (cm)	0	1	2	3	4	5
Perímetro (cm)	0	$2\pi \approx 6,28$	$4\pi \approx 12,56$	$6\pi \approx 18,84$	$8\pi \approx 25,12$	$10\pi \approx 31,4$

Tabla 2. Solución de los autores para la tabla dada en la pregunta 3. Fuente: elaboración propia.

Gráfica que relaciona los datos de la tabla:

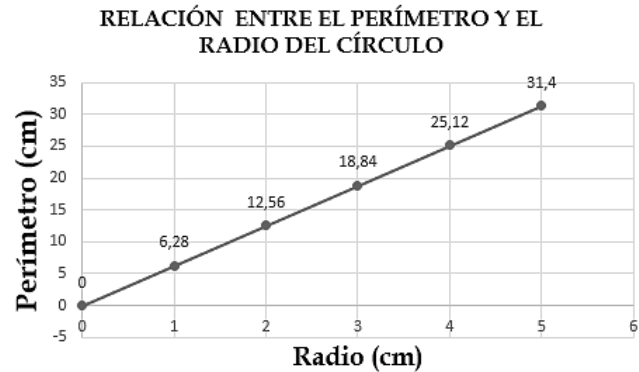


Figura 31. Solución de los autores para la gráfica solicitada en la pregunta 3. Fuente: elaboración propia.

Conclusión: la gráfica corresponde a una función lineal o de proporcionalidad directa de la forma $P(r) = 2\pi \cdot r$, la expresión “ r ” representa valores que pueden asignarse al radio de diferentes círculos (variable independiente), la expresión $P(r)$ indica que el perímetro depende del radio (variable dependiente) y la pendiente de la recta o constante de proporcionalidad es 2π .

3.5 CONFIGURACIÓN EPISTÉMICA

A continuación se caracterizan los elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos que corresponden a los

“conocimientos matemáticos” emergentes de la práctica matemática propuesta por los autores, que se relacionan y determinan la configuración.

Elementos lingüísticos. Los elementos lingüísticos considerados pueden ser términos y expresiones matemáticas tales como: lenguaje matemático, palabras o términos, notaciones, diagramas o dibujos, entre otros.

¿Existe alguna relación entre el perímetro y la medida del diámetro de cada objeto circular? Se refiere a la realización de una acción de comparación entre el perímetro del círculo y el diámetro, o entre el diámetro y el perímetro del círculo, con el objetivo de hallar una aproximación a la constante de proporcionalidad, en este caso π .

¿Se puede hallar el perímetro de otro objeto circular conociendo la medida de su diámetro? Se refiere a encontrar un modelo matemático que permita hallar el perímetro de cualquier círculo a partir de su diámetro.

Completar la tabla con los perímetros de cada círculo según el radio indicado. Se refiere al hecho de poner en funcionamiento el modelo matemático que permite hallar el perímetro de cualquier círculo al conocer su radio.

Realizar una gráfica que relacione los datos de la tabla. Se relaciona con la representación de los datos para analizar los comportamientos de proporcionalidad y establecer hipótesis relacionadas con el perímetro y el radio del círculo.

¿Qué puede concluir de la gráfica? Comprende generar argumentos explicativos de generalización relacionadas con la proporcionalidad directa.

Razón entre el perímetro y el diámetro indica el número de veces que está contenido el diámetro en la circunferencia. Se puede escribir funcionalmente así: $\frac{P}{D} = \pi$.

Razón entre el perímetro y el número π indica que el diámetro es $\frac{1}{\pi}$ veces la circunferencia. Se puede escribir funcionalmente así: $\frac{P}{\pi} = D$

Representación tabular: Ordenamiento de números en filas y columnas que facilita la interpretación de la información o toma de decisiones sobre un fenómeno específico.

Hallar: Inventar o descubrir una forma de determinar el perímetro de un círculo, conocido su diámetro.

Conflictos relacionados con los elementos lingüísticos

- a. Obtener medidas que no se aproximan al número π (π) generando dificultades en hallar una constante de proporcionalidad directa (se establece como una aproximación para π (π), el valor que va desde 3 hasta 3,3).
- b. Conflictos al hallar la razón entre el perímetro y el diámetro.
- c. No establecer un modelo matemático que relacione el radio y el perímetro del círculo.
- d. Conflictos al establecer relaciones entre el radio y el diámetro.
- e. Representar la relación entre el radio y el perímetro de formas icónicas que no permitan obtener argumentos de una proporcionalidad directa.

Conceptos

Los conceptos son entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición formal. A continuación, se dan a conocer algunos conceptos con sus significados de referencia asociados.

Medida: cantidad que resulta de medir una magnitud.

Circunferencia: es el lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de otro punto fijo llamado centro.

Círculo: es el lugar geométrico de los puntos contenidos en el interior de la circunferencia.

Relación: correspondencia o conexión que hay entre dos o más cosas.

Razón: la razón expresa, cuantifica, la comparación multiplicativa, llamada por “cociente”, entre esas dos cantidades (cuánto es de, o cuántas veces está contenido en, o cuántas unidades de... por cada unidad de...).

Perímetro: medida del contorno de una figura; el contorno refiere a los bordes o límites de una superficie.

Diámetro del círculo: segmento de recta que pasa por el centro y une dos puntos opuestos de la circunferencia.

Gráfica: tipo de representación de datos, generalmente numéricos, mediante recursos visuales (líneas, vectores, superficies, volúmenes o símbolos), para que se manifieste visualmente la relación matemática o correlación estadística que guardan entre sí. También es el nombre de un conjunto de puntos que se plasma en coordenadas cartesianas y sirve para analizar el comportamiento de un proceso o un conjunto de elementos o signos que permite la interpretación de un fenómeno. La representación gráfica permite establecer valores que no se han obtenido experimentalmente sino mediante la interpolación (lectura entre puntos) y la extrapolación (valores fuera del intervalo experimental).

Variable dependiente e independiente: las variables dependientes representan el producto o resultado cuya variación se está estudiando. Las variables independientes, también conocidas en un contexto estadístico como regresores, representan insumos o causas, es decir, razones potenciales de variación. En un experimento, cualquier variable que el experimentador manipule puede denominarse variable independiente.

Función lineal: función polinómica de grado uno, que pasa por el origen de coordenadas, es decir, por el punto (0,0). Su representación gráfica en el plano es una línea recta y su representación algebraica es $f(x) = m.x$.

Pendiente de la recta: determina la inclinación de la recta: la pendiente es la tangente del ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje de abscisas, el número que multiplica a la “ x ” en la fórmula $f(x) = m \cdot x$, aumento de la variable dependiente por unidad de la variable independiente.

Constante de proporcionalidad: familia de razones proporcionales.

Conflictos relacionados con los conceptos

- a. No se comprenden algunos de los significados de razón, perímetro, diámetro o radio.
- b. La constante de proporcionalidad π (π) no es usada para hallar el perímetro de un círculo conocido su radio o diámetro.
- c. Realización de gráficas de barras o circulares que no aportan justificaciones de una proporcionalidad directa entre el radio y el círculo.

Procedimientos

Estos procedimientos se refieren a técnicas, algoritmos y operaciones. A continuación se dan a conocer algunos procedimientos con sus significados asociados.

Razón: la razón expresa, cuantifica, la comparación multiplicativa, llamada por “cociente”, entre esas dos cantidades (cuánto es de, o cuántas veces está contenido en, o cuántas unidades de... por cada unidad de...).

Hallar el perímetro del círculo: multiplicar el diámetro por el número π (π). Simbólicamente, se escribe: $P = D \cdot \pi$.

Regla de tres simple directa: algoritmo algebraico (fórmula) que permite plantear y resolver problemas de proporcionalidad donde se desconoce un valor.

Aproximar el número π (π): encontrar un número con determinadas cifras que esté muy próximo a π (π). La aproximación puede realizarse

por defecto (inmediatamente menor) o por exceso (inmediatamente mayor) a pi (π).

Dividir: consiste en averiguar cuántas veces un número (el divisor) está contenido en otro número (el dividendo). El resultado de una división recibe el nombre de cociente. De manera general puede decirse que la división es la operación inversa de la multiplicación.

Multiplicar números reales: operación de multiplicar números racionales e irracionales.

Conflictos relacionados con los procedimientos

- Obtener distintos resultados al hallar la razón entre el perímetro y el diámetro de los círculos.
- Obtener distintos resultados al completar la tabla de perímetros.
- Manejar escalas diferentes en el eje “ x ” y en el eje “ y ” al realizar la gráfica de proporcionalidad.

Propiedades

Las propiedades se refieren a enunciados para los cuales se requiere una demostración o prueba. A continuación se dan a conocer algunas propiedades con sus significados asociados:

P1. Si se representa con “ x ” y “ y ” a los valores correspondientes a dos magnitudes correlacionadas directamente y la razón $\frac{y}{x}$ es siempre igual a una constante k , entonces las dos magnitudes son directamente proporcionales.

P2. Si se grafican en el plano cartesiano dos magnitudes que son directamente proporcionales entonces su gráfica será una línea recta de la forma $Y = k \cdot x$

Conflictos relacionados con las propiedades

- Dificultad en hallar la constante de proporcionalidad pi (π).

- b. Al graficar la relación entre el radio y el perímetro de distintos círculos no se obtiene una recta de la forma $y = k \cdot x$

Argumentos

Se refieren a las justificaciones, demostraciones o pruebas de las propiedades utilizadas. A continuación se dan a conocer algunos argumentos:

Justificación a P1 y P2: para que dos magnitudes mantengan una relación de proporcionalidad directa tienen que estar relacionadas de tal forma que, si duplicamos una, la otra también se duplica, si triplicamos una la otra también se triplica, si reducimos una a la mitad, la otra también se reduce a la mitad y si reducimos una a la tercera parte, la otra también se reduce a la tercera parte, etc.

Conflictos relacionados con los argumentos

- a. Dificultad en establecer una relación de proporcionalidad directa entre el diámetro y el perímetro del círculo.
- b. Conflictos al establecer la constante de proporcionalidad π (π).

La configuración epistémica de la situación problema no pretende ser exhaustiva: algunos otros objetos pueden involucrarse, así como la asignación de significados diferentes a los que se consideraron. Este análisis sirve de referencia para identificar los conocimientos de los estudiantes (análisis cognitivos) al resolver la situación problema propuesta y también permiten identificar potenciales conflictos de aprendizaje³⁵.

El análisis realizado sirve como un modelo del proceso que se puede seguir, ya que en ningún caso la solución matemática a un problema considera todas las alternativas de soluciones posibles ni todas las estrategias básicas que corresponden a las alternativas.

35 Castro y Rivas, “Estudio de configuraciones epistémicas y cognitivas”.

Análisis de la dimensión cognitiva a posteriori

Se realiza un análisis cognitivo que consiste en identificar prácticas matemáticas operativas y discursivas de los estudiantes; posteriormente se realiza la configuración cognitiva, que consiste en la descripción de los objetos matemáticos implicados en la práctica matemática de los estudiantes: elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos³⁶.

Prácticas matemáticas de los estudiantes

La situación problema propuesta fue desarrollada por los estudiantes en dos sesiones de clase de matemáticas, cada una de cincuenta minutos. En estas clases los estudiantes resolvieron la situación en parejas. Las prácticas matemáticas de los estudiantes en la primera clase se relacionan con medir las circunferencias y diámetros de cinco objetos circulares (monedas, tapas, platos, canecas, entre otros) rodeando el contorno de los objetos con hilo, el cual era estirado y medido con la regla; luego, con el uso de la calculadora y las medidas obtenidas, los estudiantes completaron la tabla propuesta y respondieron a las preguntas uno y dos. Algunas prácticas matemáticas realizadas por los estudiantes se evidencian en las figuras 32 y 33:



Figura 32. Medida del diámetro de un objeto circular realizada por el estudiante E1. Fuente: Elaborado por el autor.

36 Godino, “Construyendo un sistema modular e inclusivo”.



Figura 33. Materiales usados para el desarrollo de la situación problema.
Fuente: Elaborado por el autor.

En la segunda clase los estudiantes dan respuesta a la pregunta tres, completando la tabla que relaciona el radio y el perímetro de diferentes círculos; finalmente los estudiantes realizan una gráfica que relaciona los datos de la tabla y dan a conocer algunas conclusiones relacionadas con las gráficas construidas.

Las prácticas matemáticas y las producciones escritas de los estudiantes (incluidos lenguajes, conceptos, procedimientos, propiedades, argumentos, tablas, etc.) se evidenciaron en hojas que se entregaron junto con la situación problema.

Durante el desarrollo de las actividades se realizaron conversaciones con los estudiantes donde se les preguntó por qué habían realizado cada uno de los procedimientos o cómo habían llegado a la respuesta escrita. Las respuestas orales de los estudiantes quedaron registradas en modo grabadora de sonidos de un celular. De igual manera se recurrió al uso de fotografías y videos. Este conjunto de registros permitió evidenciar las prácticas matemáticas operativas y discursivas de los estudiantes.

Configuraciones cognitivas

A continuación se caracterizan los elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos que corresponden a los

conocimientos matemáticos emergentes de las prácticas matemáticas de los estudiantes al resolver las preguntas planteadas en la situación problema.

Pregunta 1. Para hallar la razón entre el perímetro y la medida del diámetro de los objetos circulares, los estudiantes realizaron una división; se resalta que, al iniciar la actividad, los estudiantes preguntaron frecuentemente el significado de razón, situación que fue movilizada por el profesor al dar a conocer a los estudiantes que la razón refería a comparar o establecer una relación entre las medidas obtenidas de los objetos circulares. A continuación, se presentan dos protocolos de estudiantes en relación con la solicitud de completar la tabla:

Nombre del objeto circular	Medida del Perímetro del objeto circular	Medida del diámetro del objeto circular	Razón entre el perímetro y el diámetro del objeto circular
Hilo	64 cm	2,4 cm	2,666
Vaso	23 cm	7,6 cm	3,026
recipiente de madera	24 cm	7,5 cm	3,2
gradador	31,3 cm	10,7 cm	2,925
CD	37,8	12,5	3,024

Figura 34. Razón entre el perímetro y el diámetro; valores alejados de π . Fuente: Estudiante E3.

Nombre del objeto circular	Medida del Perímetro del objeto circular	Medida del diámetro del objeto circular	Razón entre el perímetro y el diámetro del objeto circular
tapa de gaseosa	9,5 cm	3 cm	3,166 cm
gradador	34 cm	9,8 cm	3,469 cm
luneta - cinta	29 cm	8,7 cm	3,333 cm
parte inferior de un vaso	19 cm	5,5 cm	3,454 cm
C.D.	38 cm	11,8 cm	3,220 cm

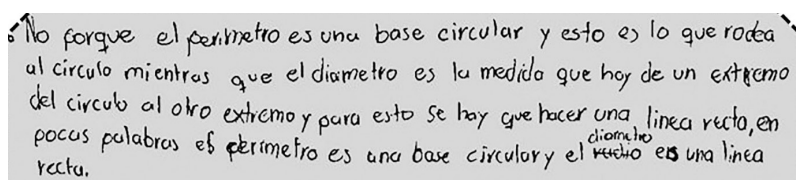
Figura 35. Razón entre el perímetro y el diámetro; valores cercanos a π . Fuente: Estudiante E11.

Los estudiantes evidenciaron prácticas como las presentadas en la figura 34 y con mayor frecuencia prácticas como las que se describen en la figura 35. Se da a conocer que los valores alejados de π obedecen al tamaño y precisión con que se medían los objetos: este tipo de práctica fue previsto en el análisis didáctico *a priori*. Respecto a la

pregunta ¿existe alguna relación entre el perímetro y la medida del diámetro de cada objeto circular? ¿Sí, no, por qué? Se identificaron los siguientes objetos primarios:

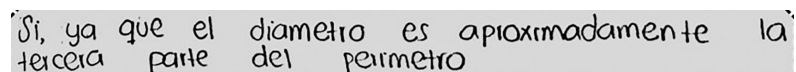
Elementos lingüísticos: Los elementos lingüísticos considerados fueron términos y expresiones matemáticas tales como lenguaje matemático, palabras, términos, notaciones, diagramas o dibujos, entre otros.

Al establecer la relación entre el perímetro y el diámetro de los círculos, los estudiantes mostraron lenguajes como los evidenciados en las imágenes 36 a 40.



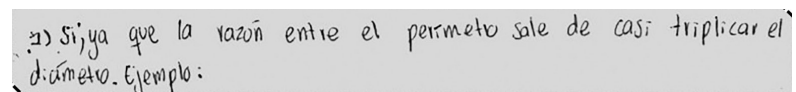
No porque el perímetro es una base circular y esto es lo que rodea al círculo mientras que el diámetro es la medida que hay de un extremo del círculo al otro extremo y para esto se hay que hacer una línea recta, en pocas palabras el perímetro es una base circular y el ^{diámetro} radio es una línea recta.

Figura 36. Lenguaje usado para justificar la no existencia de una relación. Fuente: Estudiante E15.



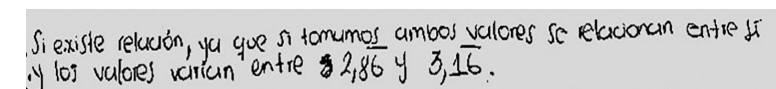
Si, ya que el diámetro es aproximadamente la tercera parte del perímetro

Figura 37. Uso de la palabra: “el diámetro es aproximadamente la tercera parte del perímetro”. Fuente: Estudiante E20.



Si, ya que la razón entre el perímetro sale de casi triplicar el diámetro. Ejemplo:

Figura 38. Uso de la palabra: “el perímetro sale de casi triplicar el diámetro”. Fuente: Estudiante E21.



Si existe relación, ya que si tomamos ambos valores se relacionan entre si y los valores varían entre 2,86 y 3,16.

Figura 39. Uso de la palabra: “los valores varían entre...” . Fuente: Estudiante E16.

Formula de la Razon:

$P = \text{Perimetro}$
 $D = \text{Diametro}$
 $R = \text{Razon}$

$$R = \frac{D \cdot 3 + (P - 3D)}{D}$$

$$= \frac{12 \cdot 3 + (38 - 36)}{12}$$

$$= 3 \frac{1}{6} = 3,16.$$

Figura 40. Lenguaje algebraico para hallar un valor aproximado de pi (π).
 Fuente: Estudiante E15.

De las prácticas y producciones escritas se evidencia que una pareja de estudiantes no logra establecer la razón entre el perímetro y el diámetro de los círculos (figura 36), mientras que con mayor frecuencia los estudiantes lograron establecer una razón (figura 37, 38 y 39). El lenguaje usado por los estudiantes para referirse a la razón entre el perímetro y el diámetro corresponde a: “el diámetro es aproximadamente la tercera parte del perímetro” (figura 37); otra expresión fue: “la razón entre el perímetro sale de casi triplicar el diámetro” (figura 38), también son usadas frases como la “razón varía entre...” (figura 739); se evidencia el uso del lenguaje algebraico (figura 40), para obtener una expresión que permite hallar la razón entre perímetro y el diámetro del círculo.

Con relación a la pregunta: ¿Existe relación entre el perímetro y el diámetro de cada objeto circular?, una pareja de estudiantes dio a conocer que el diámetro cabe tres veces y un poquito más en el perímetro y que el diámetro y el perímetro del círculo guardan una proporción, como se evidencia en el diálogo que se transcribe a continuación. Participan los estudiantes E1 y E2 y el profesor (P).

P: —Muchachos, ustedes completaron la tabla; quiero que me digan, ¿existe relación entre el perímetro y el diámetro de cada objeto circular?

E1: —Pues sí, porque, digamos, la razón que hay entre el diámetro y el perímetro da como una aproximación a lo que es pi, esa es como la relación que guarda o, pues, que vimos que guardan las dos medidas.

P: —Bueno... al hallar la razón entre el perímetro y el diámetro en cada uno, ¿cuánto les daba?

E2: —Nos daba tres y un poquito más y pues eso depende de qué tan exacto sea la medida, entre más específicos seamos con las medidas pues nos va dando más cifras de pi.

P: —Bueno... ¿qué significarían esos valores cercanos a pi que obtuvieron?

E2: —Es lo que cabe, es el que, en el *umm...*, en el perímetro cabe tres veces el diámetro, o sea, el diámetro cabe tres veces y un poco más.

P: —Bueno... ¿y creen que eso siempre se va a repetir en los objetos circulares?

E1: —Sí porque, digamos, guarda una proporción, digamos, si tú tienes un..., o sea, siempre la guarda porque es proporcional, ¿si me entiendes?, si tienes un objeto de este tamaño pues el diámetro va a ser como proporcional, por eso siempre va a dar ese tres y un poco más.

P: —Tú acabas de mencionar proporcional; ¿qué entiendes por proporcional?

E1: —Proporcional es, digamos, cuando... es que no sé cómo decirlo, que, digamos, si un objeto es grande, sus medidas se van a agrandar y de pronto su área, su diámetro, su perímetro se va agrandar, como que guarda una relación entre todas esas medidas, eso es como lo que entiendo como proporción.

E2: —Es como el relativo ¿no?, también se podría usar hay.

P: —Por ejemplo, el relativo qué sería, ¿para expresar qué?

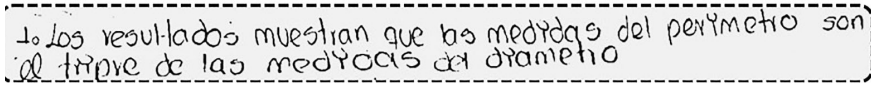
E2: —Pues la cuestión de tamaños relativos.

P: —¿Y qué significa que tengan tamaños relativos?

E2: —Porque, digamos, digamos, yo tengo un cuadrado de dos por dos, si yo lo voy amplificando, pues, digamos, digamos, cuatro por cuatro y así, siempre van guardando como una similitud entre los cuadrados, pero, digamos, no porque yo agrande un lado el área va a seguir siendo siempre la misma sino que también se va, digamos, puede que cuadriplíquese y así entonces va guardando un tipo de relación.³⁷

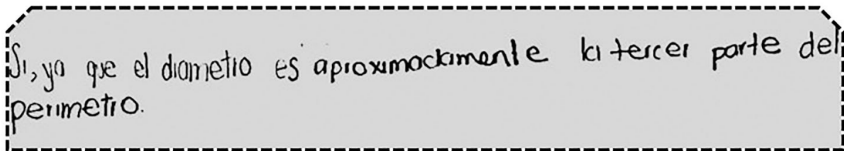
37 Transcripción de grabación en audio n.º 1, 2019.

Conceptos: los conceptos identificados son representaciones matemáticas, para las cuales se puede formular una definición formal. En seguida se dan a conocer algunos de los conceptos identificados en las prácticas de los estudiantes, al establecer la relación entre el perímetro y el diámetro de los círculos. Los estudiantes dieron a conocer conceptos como los evidenciados en las figuras 41, 42 y 43:



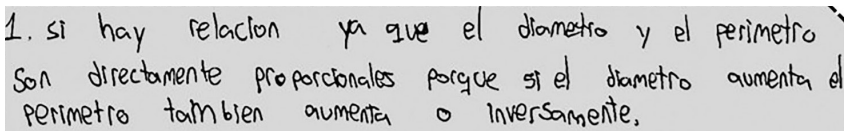
Lo los resultados muestran que las medidas del perimetro son el triple de las medidas del diametro

Figura 41. Concepto usado: “triple”. Fuente: Estudiante E12.



Si, ya que el diametro es aproximadamente la tercer parte del perimetro.

Figura 42. Concepto usado: “tercera parte”. Fuente: Estudiante E18.

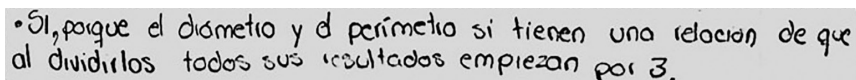


1. si hay relacion ya que el diametro y el perimetro son directamente proporcionales porque si el diametro aumenta el perimetro tambien aumenta o inversamente.

Figura 43. Concepto usado: “directamente proporcionales”. Fuente: Estudiante E17.

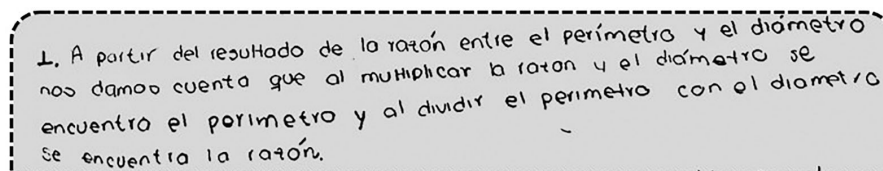
Las producciones escritas evidencian que el concepto “triple” (figura 41) fue usado con mayor frecuencia por los estudiantes para indicar la relación entre el perímetro y el diámetro, y con menor frecuencia se usó la frase “tercera parte” (figura 42), para establecer la relación entre el diámetro y el perímetro; además, los estudiantes usaron la expresión “directamente proporcional” (figura 43), para indicar la relación entre el perímetro y el diámetro. Otros conceptos usados por los estudiantes fueron: diámetro, perímetro, radio, medida, número decimal, número entero, número impar, número par, fórmula, valor exacto, extremo, línea recta.

Procedimientos: Los procedimientos se refieren a técnicas, algoritmos, y operaciones. A continuación se presentan algunos procedimientos identificados en las prácticas de los estudiantes al establecer la relación entre el perímetro y el diámetro de los círculos. Los estudiantes mostraron procedimientos como los evidenciados en las figuras 44 y 45:



Si, porque el diámetro y el perímetro si tienen una relacion de que al dividirlos todos sus resultados empiezan por 3.

Figura 44. Procedimiento usado: “división”. Fuente: Estudiante E7.

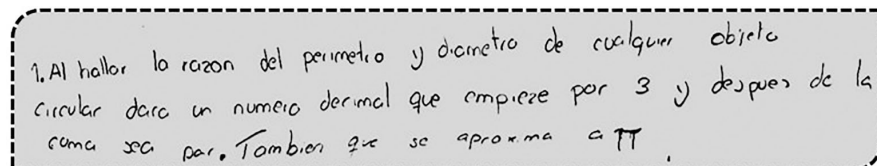


1. A partir del resultado de la razón entre el perímetro y el diámetro nos damos cuenta que al multiplicar la razón y el diámetro se encuentra el perímetro y al dividir el perímetro con el diámetro se encuentra la razón.

Figura 45. Procedimiento usado: “multiplicación y división”. Fuente: Estudiante E10.

El análisis de las producciones escritas evidenció que los estudiantes usaron procedimientos como “dividir y multiplicar” (figuras 44 y 45) para hallar la relación entre el perímetro y el diámetro.

Propiedades y argumentos: Las propiedades se refieren a enunciados para los cuales se requiere una demostración o prueba; los argumentos son justificaciones, demostraciones o pruebas de las propiedades utilizadas. Se dan a conocer algunos argumentos y propiedades implícitas en las prácticas de los estudiantes:



1. Al hallar la razón del perímetro y diámetro de cualquier objeto circular dara un numero decimal que empieze por 3 y despues de la coma sea par. Tambien que se aproxima a π .

Figura 46. Propiedad que justifica la razón entre el perímetro y el diámetro. Fuente: Estudiante E13.

1. si hay relacion ya que el diametro y el perimetro son directamente proporcionales porque si el diametro aumenta el perimetro tambien aumenta o inversamente.

Figura 47. Justificación de la proporcionalidad. Fuente: Estudiante E19.

1. Si existe, debido a que si tenemos el diametro y lo multiplicamos por 3, y luego sumamos el primer termino de la division de estos 2, me da el resultado del valor al que equivale el perimetro, es decir:

Tengo un objeto con los siguientes medidos:		
Perimetro	Diametro	Razon entre perimetro y diametro
↓	↓	↓
18 cm	5	3/6.

Tomamos el diametro y lo multiplicamos por 3, lo que me da 15 como resultado y a esto le sumo el primer termino correspondiente a la razon entre perimetro y diametro, en este caso el 3. y esto tiene como resultado 18, que equivale al perimetro del objeto

Figura 48. Justificación de la relación entre el perímetro y el diámetro. Fuente: Estudiante E26.

El análisis de las producciones escritas evidencia que los estudiantes usaron propiedades “informales”, no necesariamente de la forma “si p entonces q ”, para dar a conocer la relación entre el perímetro y el diámetro del círculo (figura 46). Se evidencia que con mayor frecuencia los estudiantes realizan justificaciones con palabras y operaciones aritméticas (figuras 47 y 48), para dar a conocer la relación entre el perímetro y el diámetro del círculo.

Pregunta 2. Con relación a la pregunta “¿se puede hallar el perímetro de cualquier objeto circular conociendo la medida de su diámetro? ¿Sí, no, por qué?”, se identificaron los siguientes objetos:

Elementos lingüísticos: los estudiantes usaron lenguajes como los evidenciados en las figuras 49 a 55:

Al multiplicar el diámetro con la razón el resultado será el perímetro aproximado.

Figura 49. Lenguaje en palabras que relaciona el diámetro con la razón. Fuente: Estudiante E21.

Si, porque se halla una constante que en este caso es 3 y cada diámetro se multiplica por 3 y nos da el perímetro.

Figura 50. Lenguaje en palabras que evidencia la razón como una constante. Fuente: Estudiante E7.

Si se puede determinar al momento de multiplicar el diámetro y la razón
 $7 \times 3,07 = 21,5$

Figura 51. Lenguaje en palabras y numérico que relaciona el diámetro con la razón. Fuente: Estudiante E28.

Si, multiplicando la razón del perímetro y el diámetro por el diámetro.

Diámetro	Perímetro
3,5	9
4,0	12,5

$x = \frac{4,0 - 9}{3,5} = \frac{360}{3,5} = 102,857 \text{ R/}$

Figura 52. Lenguaje numérico dispuesto en forma tabular para hallar el perímetro. Fuente: Estudiante E6.

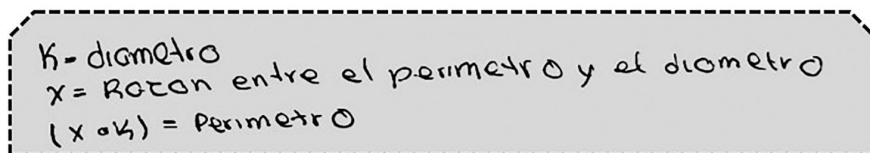
Si porque al multiplicar cualquier medida de diámetro por 3 da un resultado aproximado al perímetro ($3(x)$)

Figura 53. Lenguaje en palabras y algebraico que evidencia la relación entre el perímetro y el diámetro. Fuente: Estudiante E27.

$x \cdot 3 + 1 = p$
 $x = \text{diámetro}$
 $p = \text{perímetro}$

Rta= Si se puede hallar gracias a la fórmula que aplicamos para encontrar su perímetro

Figura 54. Lenguaje algebraico que evidencia una aproximación al perímetro. Fuente: Estudiante E4.



Handwritten text in a dashed box:

$$\begin{aligned}
 k &= \text{diámetro} \\
 x &= \text{Razon entre el perimetro y el diámetro} \\
 (x \cdot k) &= \text{Perimetro}
 \end{aligned}$$

Figura 55. Lenguaje algebraico que evidencia la relación entre el perímetro y el diámetro. Fuente: Estudiante E23.

En los protocolos se evidencia que los estudiantes usan tres tipos de lenguaje para justificar la relación entre el diámetro y el perímetro; lenguaje en palabras (figuras 49 y 50), lenguaje numérico (tabular) (figuras 51 y 52), y lenguaje algebraico (figuras 53, 54 y 55). Los lenguajes en palabras dan a conocer que la razón juega un papel importante “como número y como constante” que al ser multiplicado con el diámetro permite hallar el perímetro. Con relación al lenguaje numérico, los estudiantes usaron los números para justificar la relación entre el diámetro y el perímetro usando los datos obtenidos de la pregunta 1 o dando ejemplos que, al ser ordenados en forma tabular y aplicar la regla de tres, permitieron hallar el el perímetro del círculo al conocer su diámetro.

Con relación al lenguaje algebraico, los estudiantes usaron el número 3 como valor aproximado de la razón entre el perímetro y el diámetro para indicar una constante de proporcionalidad: se evidenció el uso de las letras como x, n para representar el diámetro y el uso de la letra p para representar el perímetro, aunque en ocasiones las expresiones algebraicas no evidencian un signo igual “=”, se establece en el desarrollo de las actividades el uso frecuente de la expresión “perímetro aproximado”, lo cual lleva a los estudiantes a crear fórmulas que relacionan el perímetro y el diámetro como las evidenciadas en la (figura 54): $x \cdot 3 + 1 = p$, que llevan a sumar 1 al triple del diámetro para obtener medidas del perímetro más exactas.

Con relación a la pregunta 2, “¿Se puede hallar el perímetro de cualquier objeto circular conociendo la medida de su diámetro?”, una pareja de estudiantes dio a conocer que sí es posible, multiplicando el diámetro por pi (π), además justificaron que esto siempre se puede hacer porque pi (π) es una medida universal, como se evidencia en el

diálogo que se transcribe a continuación. Intervienen los estudiantes E1 y E2 y el profesor (P):

P: —Ustedes, después de completar la tabla contestaron unas preguntas; me llama la atención lo siguiente: si ustedes conocen el diámetro de un círculo, solamente el diámetro, ¿se puede hallar el perímetro?

E1: —Sí, pues, si tu multiplicas la pi por “D”...

E2: —Sí, por el diámetro.

P: —O sea, ¿el diámetro por cuánto?

E1 y E2: —Por 3,14.

P: —Bueno ¿y siempre se va a cumplir eso?

E2: —Eeh... sí.

E1: —Sí porque es una medida universal, es como el promedio de todas estas medidas [señala los valores obtenidos en la tabla].

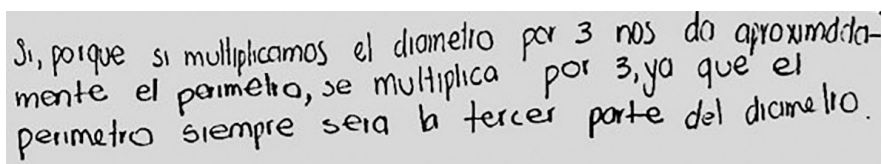
P: —¿Y cómo haces para llegar a una medida universal?

E1: —Pues le sacas como el, la proporción, o sea, ¿cómo se dice?, eh... lo que acabé de decir.

P: —¿El promedio?

E1: —Sí, eso, el promedio, que se aproximaría a casi 3,14.³⁸

Conceptos: Los estudiantes usaron conceptos como los evidenciados en las figuras 56 y 57:



Si, porque si multiplicamos el diametro por 3 nos da aproximadamente el perimetro, se multiplica por 3, ya que el perimetro siempre sera la tercer parte del diametro.

Figura 56. Conceptos usados: “diámetro, aproximar, perímetro, tercer parte”. Fuente: Estudiante E5.

38 Transcripción de grabación en audio n.º 2, 2019.

Si, porque Al multiplicar el diámetro por tres se halla el perímetro pero no es exacto con todas las medidas

Figura 57. Conceptos usados: “diámetro, halla, exacto, medida”. Fuente: Estudiante E25.

El análisis de las producciones escritas da a conocer que los estudiantes usaron el concepto “aproximar” (figura 56) y la expresión “el perímetro no es exacto” (figura 57), evidenciando el reconocimiento y el uso de números racionales para hallar el perímetro a partir del diámetro y un valor aproximado de π (π).

Se evidencia el uso de conceptos como “la tercera parte” (figura 56) y la expresión “multiplicar el diámetro por tres” (figura 57), para indicar la relación entre el diámetro y el perímetro. Otros conceptos usados por los estudiantes fueron: constante, razón, resultado, aproximar, cercano, valor exacto, variar, número, medida, equivale, determinar, hallar, diámetro, radio perímetro, fórmula.

Procedimientos: Los estudiantes usaron procedimientos como los evidenciados en las imágenes 58, 59 y 60:

Perímetro	diámetro	Procedimiento
? = 121	40 cm	$40 \cdot 3 + 1 = 121$ Perímetro

Rta: porque nos dimos cuenta de que al multiplicar el diámetro por tres y sumarle uno nos da el valor del perímetro lo cual deducimos a partir de pruebas.

Figura 58. Procedimientos usados: multiplicación y suma. Fuente: Estudiante E24.

Si ya que el diámetro permite hallar el radio (cuando se divide entre 2) y la fórmula para hallar el perímetro es $= \pi \cdot 2r$.

Figura 59. Procedimientos usados: división para hallar el radio a partir del diámetro. Fuente: Estudiante E22.

Si se puede determinar, ya que sabiendo que con medidas entre los 10cm y 7cm la razón varía entre 2,86 y 3,16 se puede llegar a un valor aproximado si se encuentra el número y lo se formula una respectiva fórmula, en este caso una fórmula que señale el valor exacto

Figura 60. Procedimiento usado: "aproximación" para hallar el perímetro del círculo. Fuente: Estudiante E7.

El análisis de las producciones escritas de los estudiantes da a conocer que se usaron tres tipos de procedimientos: multiplicación y suma (figura 58), división (figura 59) y aproximación (figura 60), a través de estos procedimientos los estudiantes justificaron las formas de hallar el perímetro a partir del diámetro. En los procedimientos se evidencia el uso de números racionales y la aproximación como forma de justificar el perímetro del círculo.

Propiedades y argumentos: Los estudiantes usaron propiedades y argumentos como los evidenciados en las imágenes 61, 62 y 63:

si el radio de el va aumentando su perímetro también 'así' es directamente proporcional.

Figura 61. Propiedad usada para justificar la proporcionalidad. Fuente: Estudiante E17.

Justificación:
Si el radio es 20 cm, se multiplica por 2 y queda 40cm, luego 40 se multiplica por $\pi(3,1416)$ y eso da 125,664 cm.

Figura 62. Justificación usada para realizar una operación. Fuente: Estudiante E16.

no Porque hasta ahora las formulas no han dado un resultado completo sino un resultado aproximado

Figura 63. Justificación usada para indicar que no es posible escribir una fórmula. Fuente: Estudiante E18.

El análisis de las producciones escritas evidencia que los estudiantes usaron propiedades “informales” no necesariamente de la forma “si p entonces q ” (figura 61) y justifican los procedimientos para hallar el perímetro cuando se conoce el diámetro (figura 62), esto a través de operaciones y procedimientos. Se evidencia que los estudiantes usan diferentes lenguajes, como palabras, números y expresiones algebraicas para justificar la relación entre el diámetro y el perímetro (figuras 61 a 63). Además, se evidencia que una pareja de estudiantes justificó que no era posible establecer una relación entre el perímetro y el diámetro porque los datos obtenidos evidenciaban solo aproximaciones (figura 63).

Pregunta 3. Con relación a la situación “completar la tabla según los radios indicados, y representar la información en una gráfica”, se establece que los estudiantes usaron simultáneamente una diversidad de objetos matemáticos: elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos como los evidenciados en las figuras 64 a 69:

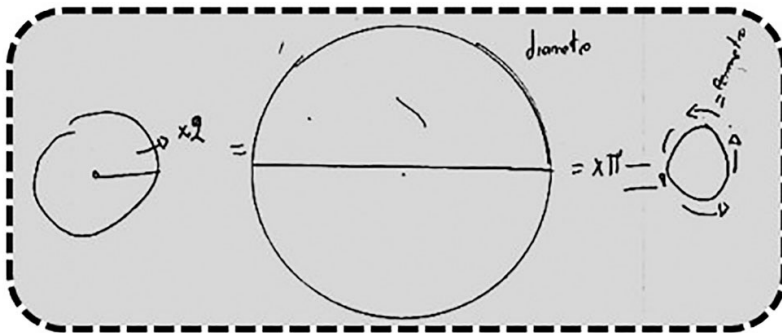


Figura 64. Lenguaje gráfico: representación icónica. Fuente: Estudiante E8.

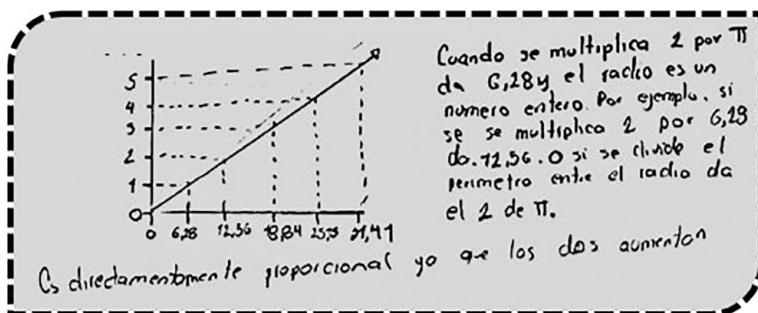


Figura 65. Lenguaje gráfico: gráfica de barras. Fuente: Estudiante E1

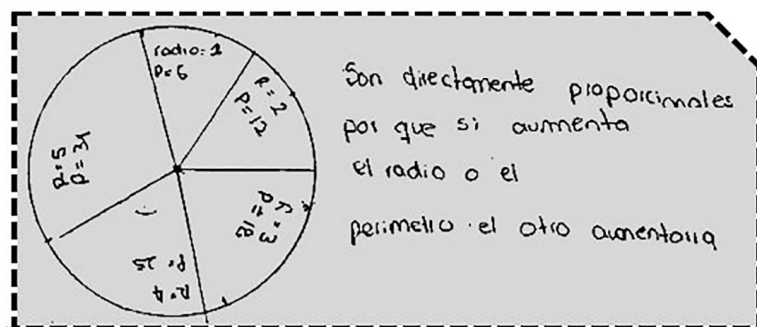


Figura 66. Lenguaje gráfico: gráfica circular. Fuente: Estudiante E9.

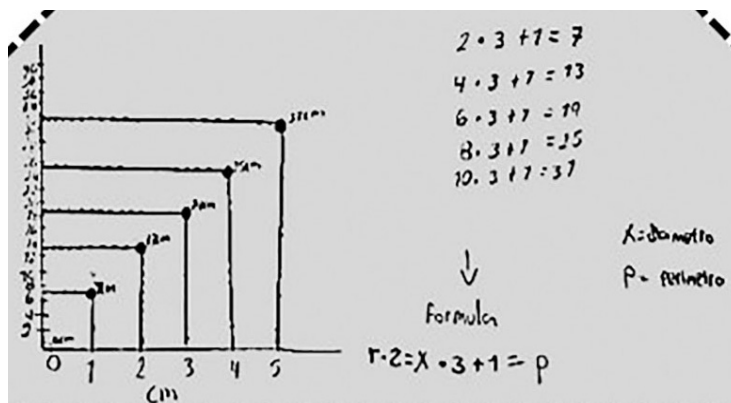


Figura 67. Lenguaje gráfico: gráfica de puntos. Fuente: Estudiante E13.

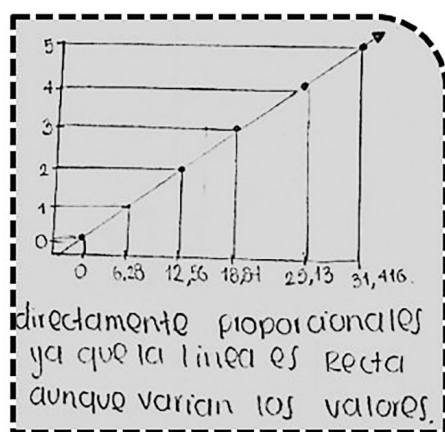


Figura 68. Lenguaje gráfico: línea recta. Fuente: Estudiante E8.

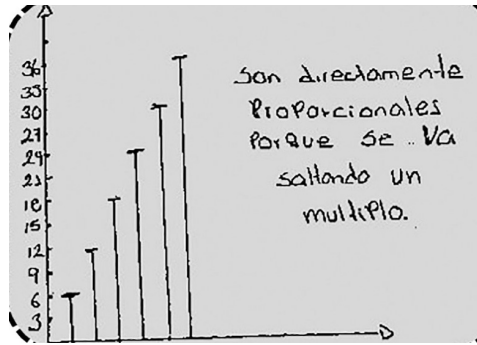


Figura 69. Lenguaje gráfico: gráfica de barras. Elaboración Estudiante E15.

En los protocolos escritos se evidencia que los estudiantes usan representaciones icónicas (figura 64) y representan los datos de las tablas usando diferentes tipos de gráficas: lineales (figuras 65 a 68), de puntos (figura 67), circular (figura 66) y de barras (figura 69), además de justificar la existencia de una proporcionalidad directa mediante el uso de palabras como “línea recta” (figura 68), o similares a “si uno aumenta el otro aumenta” (figura 66); otros estudiantes justifican la proporcionalidad con operaciones como multiplicaciones, divisiones y sumas (imágenes 65 y 67) que son interpretadas desde las fórmulas que ellos mismos crean.

Con relación a la pregunta “¿por qué usaste una gráfica de barras?”, un estudiante dio a conocer que este tipo de gráfica refleja mejor la proporcionalidad porque los valores de los diámetros y los perímetros indicados en la tabla son proporcionales, como se evidencia en el diálogo que se describe a continuación. Intervienen el estudiante E7 y el profesor (P):

P: —¿Por qué utilizaste este tipo de gráfica de barras?

E7: —Porque esta gráfica refleja mejor, digamos, lo que es proporcional, porque va aumentando en línea recta, entonces, aquí esto nos puede decir que es directamente proporcional [señala la gráfica], porque cada que va aumentando va aumentando todo si, o digamos, cada que va disminuyendo va disminuyendo todo.

P: —¿Todo es qué?, explícame bien eso.

E7: —Eh, digamos acá [señala la gráfica], la primera que nos daba con radio 1, o sea, diámetro dos, nos iba a dar 6 y un poquito más, si, cuando iba aumentando a diámetro 4 nos iba a dar 12 y un poquito más, cuando iba aumentando a radio 6 nos iba a dar 18 y un poquito más, y así, iba sucesivamente, entre más iban aumentando los de la izquierda, también iban aumentando los de abajo.

P: —¿Pero por qué utilizaron la gráfica de barras?

E7: —No sé, nos pareció más fácil como representar lo que estábamos viendo.

P: —Ok, perfecto. Tú mencionabas algo de que había como una línea recta, la cuestión sería la siguiente: ¿necesariamente tiene que haber una recta para que haya una proporcionalidad?

E7: —No, porque..., digamos, hay dos tipos de proporcionalidad: la directa y la inversa, en la que la directa sí aparece una recta, pero digamos en la inversa es, digamos, un valor disminuye y otro puede aumentar, entonces lo que está generándose es una curva.³⁹

3.6 REFLEXIONES FINALES

El estudio tiene como objetivo caracterizar los significados parciales de los objetos razón y proporción, emergentes de las prácticas matemáticas de estudiantes de grado séptimo al resolver la situación problema: “Construcción del Modelo Matemático que relaciona el radio y el perímetro del círculo”, a través del uso de herramientas teóricas y metodológicas propuestas en el EOS⁴⁰. Se presenta la caracterización de los significados parciales de los objetos razón y proporción emergentes de las soluciones dadas por los estudiantes a la situación propuesta.

En las respuestas dadas por los estudiantes a la pregunta “¿Existe alguna relación entre el perímetro y la medida del diámetro de cada objeto circular? ¿Sí, no, por qué?”, se evidencia el uso de la expresión

39 Transcripción de grabación en audio n.º 3, 2019.

40 Godino, “Construyendo un sistema modular e inclusivo”.

“casi triplicar” para referirse a la relación entre el perímetro y el diámetro, y el uso de la expresión “tercera parte” para referirse a la relación que hay entre el diámetro y el perímetro; en estas dos expresiones la razón es interpretada por los estudiantes como relator⁴¹ (significado parcial 1 del objeto razón), ya que da información sobre la relación parte-todo entre las dos cantidades comparadas, además, en el lenguaje oral se evidencia que la expresión *pi* (π), es considerada por una pareja de estudiantes como una constante universal que se aproxima a 3.

En las soluciones dadas a la pregunta 2: ¿Se puede hallar el perímetro de cualquier objeto circular conociendo la medida de su diámetro?, algunos estudiantes usan tablas numéricas para hallar el perímetro de otros círculos a partir de datos obtenidos de las mediciones iniciales, en este tipo de soluciones se evidencia el uso de la proporcionalidad desde un razonamiento funcional⁴² (significado parcial 1 del objeto proporción) donde las razones son relacionadas mediante multiplicaciones para hallar los perímetros desconocidos.

Además, se evidencia el uso de fórmulas a través de un lenguaje algebraico como: $3x$ expresiones similares a $P=3n + 1$, en este caso la razón es usada como operador⁴³ (significado parcial 2 del objeto razón), porque expresa un factor de ampliación o reducción, que aplicado sobre el diámetro produce el perímetro. Desde esta panorámica, el lenguaje algebraico evidencia también el uso implícito de la proporción como analogía⁴⁴ (significado parcial 2 de proporcionalidad), es decir, los estudiantes, al determinar la relación que existe entre el perímetro y el diámetro: aproximadamente *pi* (π), trasladan esta relación (razón) a otros perímetros, que pueden ser determinados a partir de diámetros o radios dados.

Con relación a la pregunta 3, que se refiere a graficar la relación entre el perímetro y el diámetro y justificar la proporcionalidad

41 Gilberto Obando, Carlos Eduardo Vasco y Luis Carlos Arboleda, “Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte”, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 17, n.º 1, 2014.

42 Daniela Reyes, *La transversalidad de la proporcionalidad*. México: Secretaría de Educación Pública, 2013, 21-33.

43 Hurtado, Significado global de la proporcionalidad, 43-50.

44 Ibíd.

entre magnitudes, se evidencia en las producciones escritas de los estudiantes el uso del lenguaje gráfico a través de una variedad de representaciones: icónicas, circulares, de barras, de puntos y lineales; en estas representaciones y en los procedimientos usados para su construcción se da a conocer el uso de la razón en su significado de correlator⁴⁵ (significado parcial 3 de razón), es decir el valor de π (π) es interpretado por los estudiantes como transformador lineal: número racional sin unidades, denominado factor escalar, que aplicado sobre un diámetro produce un determinado perímetro.

En las justificaciones dadas en la construcción de gráficas se evidencia que los estudiantes usan razonamientos de tipo cualitativo⁴⁶ (significado parcial 3 de proporción) para justificar la relación de proporcionalidad entre el perímetro y el diámetro de los círculos. Del proceso investigativo realizado en el estudio se establece que los significados de los objetos razón y proporción emergentes de las prácticas matemáticas de los estudiantes, al resolver la situación problema “Construcción del Modelo Matemático que relaciona el radio y el perímetro del círculo”, corresponden a los presentados en tablas 3 y 4:

Objeto matemático	Significado parcial
Razón	Relator
Razón	Operador
Razón	Correlator

Tabla 3. Significados parciales del objeto matemático razón. Fuente: elaboración propia.

Objeto matemático	Significado parcial
Proporción	Razonamiento funcional
Proporción	Razonamiento por analogía
Proporción	Razonamiento cualitativo

Tabla 4. Significados parciales del objeto matemático proporción. Fuente: elaboración propia.

⁴⁵ Ibíd.

⁴⁶ Ibíd.

Estos significados parciales de los objetos razón y proporción identificados en el estudio, cobran importancia cuando el docente de matemáticas los comprende y llega a proponer situaciones problema que favorezcan el aprendizaje significativo de los estudiantes. En Hurtado⁴⁷ y Sepúlveda⁴⁸ se evidencia la importancia del conocimiento del significado de los objetos matemáticos por parte del profesor, lo cual lleva a un proceso de selección de significados pretendidos para desarrollar los procesos de instrucción. Estos estudios epistemológicos son complejos, en orden a llevar a caracterizar completamente el significado global de un objeto matemático y más importante aún cuando se diseñan actividades conducentes a la construcción de los objetos matemáticos por parte de los estudiantes⁴⁹.

Finalmente, la identificación de elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos presentes en las prácticas matemáticas de los estudiantes llevó a los autores a comprender algunos significados de los objetos razón y proporción y además evidenciar la diversidad de representaciones simbólicas que ofrecen los estudiantes al construir dichos objetos. Esta reflexión pedagógica de los autores puede llegar a desarrollar algunas de las competencias didáctico-matemáticas, necesarias para una enseñanza idónea de los objetos matemáticos razón y proporción.

3.7 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Fuentes documentales impresas

Hurtado Martínez, Miguel. “Significado global de la proporcionalidad en las prácticas matemáticas de los estudiantes de grado séptimo”. Tesis de maestría en Educación Matemática, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, 2019.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN), “Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas”, Bogotá, 2006.

47 Hurtado, “Significado global de la proporcionalidad”

48 Omaidá Sepúlveda D., *El conocimiento didáctico-matemático del profesor universitario*. Tunja: Editorial UPTC, 2018.

49 Ibíd.

Ministerio de Educación Nacional (MEN), “Lineamientos Curriculares - Matemáticas”, Bogotá, 1998.

Ministerio de Educación Nacional (MEN), “Derechos Básicos de Aprendizaje”, Bogotá, 2010.

Libros

D’Amore, Bruno. *Didáctica de la Matemática*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio, 2011.

García O., Gloria y Celly Serrano. *La comprensión de la proporcionalidad, una perspectiva social y cultural*. Bogotá: Grupo Editorial Gaia, 1999.

Guacaneme, Édgar A. “Significados de los conceptos de razón y proporción en el Libro V de los *Elementos*”, en *Pensamiento, epistemología y lenguaje matemático*, editado por Olga Lucía León, 99-135. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2012.

Hernández Sampieri, Roberto, Carlos Fernández Collado y Pilar Baptista Lucio. *Metodología de la investigación*. México: Mc Graw-Hill, 2014.

Hoffer, A. R. “Ratios and proportional thinking”, en *Teaching mathematics in grades K-8: Research based methods*, editado por Th. R. Post y publicado en Boston por Allyn and Bacon, en 1988.

Lamon, S. “Rational number and proportional reasoning” Toward a theoretical framework for research, en F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook Of Research On Mathematics Teaching and Learning*, publicado en New York, en 2007.

Perry, Patricia, Édgar Guacaneme, Luisa Andrade y Felipe Fernández. *Transformar la enseñanza de la proporcionalidad en la escuela: un hueso duro de roer*. Bogotá: Una empresa docente-Universidad de los Andes, 2003.

Reyes, Daniela. *La transversalidad de la proporcionalidad*. México: Secretaría de Educación Pública, 2013.

Sepúlveda, Omaida. *El conocimiento didáctico matemático del profesor universitario*. Tunja: Editorial UPTC, 2018.

Skovsmose, Ole. “Escenarios de investigación”, en *Educación Matemática Crítica: una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas*, compilado por Paola Valero y Ole Skovsmose, 109-130. Bogotá: Universidad de los Andes / Aalborg University, 2012.

Vasco, Carlos Eduardo. *Didáctica de las matemáticas: Artículos selectos*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional, 2006.

Vergnaud, Gérard. *El niño, las matemáticas y la realidad: Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. México: Trillas Editorial, 1991.

Artículos de revistas

Arboleda, Luis Carlos y Gloria Castrillón, “La historia y la educación matemática en el ‘horizonte’ conceptual de la pedagogía”, *Quipu. Revista Latinoamericana de Historia de las Ciencias y la Tecnología*, vol. 14, n.º 1, 2012: 13-32.

Burgos, María, Pablo Beltrán, Belén Giacomone y Juan Godino, “Conocimientos y competencia de futuros profesores de matemáticas en tareas de proporcionalidad”, *Educação e Pesquisa*, vol. 44, 2018: 1-22.

D’Amore, Bruno y Juan Godino, “El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática”, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 10, n.º 2, 2007: 191-218.

Obando, Gilberto, Carlos Eduardo Vasco y Luis Carlos Arboleda, “Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte”, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 17, n.º 1, 2014: 59-82.

Sánchez, Eruin A., “Razones, proporciones y proporcionalidad en términos de variación y correlación entre magnitudes”, *Revista Sigma*, vol. 11, n.º 1, 2013: 10-25.

Consultas de internet

Castro Gordillo, Walter. “Evaluación y desarrollo de competencias de análisis didáctico de tareas sobre razonamiento algebraico elemental en futuros profesores”. Tesis de doctorado en Matemáticas con especialidad en Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada (España), 2011, https://www.ugr.es/~jgodino/Tesis_doctorales/Walter_Castro_tesis.pdf. (Consultado el 5 de agosto de 2018)

Godino, Juan. “Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática”, en *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*, 1-20, Universidad de Granada (España), 2017 <http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.htm>. (Consultado el 2 de enero de 2018)

Obando Zapata, Gilberto. “Sistema de prácticas matemáticas en relación con las Razones, las Proporciones y la Proporcionalidad en los grados 3º y 4º de una institución educativa de la Educación Básica”. Tesis de doctorado en Educación, Universidad del Valle, 2015, [file:///C:/Users/ASUS_/Downloads/CB-0519794%20\(3\).pdf](file:///C:/Users/ASUS_/Downloads/CB-0519794%20(3).pdf). (Consultado el 12 de agosto de 2018)

Rivas, Mauro y Walter Castro. “Aportes del estudio de configuraciones epistémicas y cognitivas sobre la proporcionalidad en la formación inicial de profesores de primaria”, en *Memorias del 12.º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (ECME)*, 131-142, Armenia (Quindío): Gaia, 2011; <http://funes.uniandes.edu.co/2589/1/RivasAportesAsocolme2011.pdf> (Consultado el 2 de marzo de 2018)

Sepúlveda Delgado, Omaida. “Conocimiento didáctico-matemático del profesor universitario para la enseñanza del objeto grupo”. Tesis de doctorado, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, 2016, http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/Tesis_Omaida.pdf. (Consultado el 10 de junio de 2018).

CAPÍTULO 4. A MODO DE EPÍLOGO

Como se mencionó en la introducción, este libro no pretende convertirse en un manual que permita al docente de matemáticas encontrar las soluciones a las problemáticas que enfrenta en su aula de clase, cuando los resultados que obtiene por parte de sus estudiantes no son los que esperaba; las aspiraciones de los autores estuvieron encaminadas a la búsqueda de aportes que susciten nuevas perspectivas, estrategias y reflexiones que permitan enriquecer la labor docente.

Estas propuestas ofrecen alternativas que anhelan expandir el espectro en el campo de investigación en el aula a aquellos docentes inquietos y reflexivos en su práctica educativa, quienes saben y tienen presente que el fin último de la educación es generar espacios que susciten potenciar el pensamiento crítico de los estudiantes, independientemente de las disciplinas o áreas escolares; necesidad apremiante en los tiempos actuales, entendiendo el pensamiento crítico como el proceso reflexivo orientado a la toma de decisiones razonadas que realiza el individuo sobre sus creencias y sus acciones.

Desde la matemática, la ardua labor de fortalecer el desarrollo del pensamiento crítico en los educandos va ligada con los propósitos de la Educación Matemática Crítica (EDC), donde, para alcanzar los objetivos anhelados, se hace vital que el docente esté en permanente búsqueda de estrategias que propicien el surgimiento de prácticas transformadoras de su quehacer docente; prácticas que involucren habilidades intelectuales que fomentan el pensamiento crítico: la interpretación, el análisis, la inferencia, la evaluación, la explicación y la autorregulación.

Los autores

Esta edición se imprimió en el mes
de diciembre de 2020, en los talleres
gráficos de Búhos Editores Ltda.,
con una edición de 200 ejemplares.